NOTE

Sur la valeur du coefficient des formules données par M. de la Place, *pour la détermination des hauteurs à l'aide du baromètre.*

Par M. Daubuisson (1).

Détermination des coefficiens.

M. de la Place a établi, qu'en regardant la pesanteur comme une force constante, une hauteur, x, était donnée par la formule

$$x = C(1+0{,}002\,(t+t'))\left\{\log. H - \log. h\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)\right\},$$

et, qu'en ayant égard à la diminution de la pesanteur à mesure qu'on s'élève, elle l'était (sous le 50^{e}. grade de latitude) par

$$x = C'\,(1+0{,}002\,(t+t'))$$
$$\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(\log. H - \log. h\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)\right)+\frac{x}{a}\,0{,}868589\right\}:$$

dans lesquelles, H et h expriment les élévations du baromètre au bas et au haut de la hauteur à déterminer; t, t', T, T' les températures de l'air et du baromètre aux deux stations; a le rayon de la terre; et C et C' deux coefficiens constans, qu'on doit déterminer par

(1) Voyez le développement de ces formules dans le tome 19 de ce Journal.

l'expérience. (Le second C' est réduit au niveau de la mer.)

Des observations de M. Ramond, faites avec un soin particulier sur plusieurs montagnes, notamment sur le pic du midi, dont on connaissait la hauteur x, ayant donné les valeurs de H, h, T, T', t, t'; tout a été connu dans les deux formules, à l'exception de C et de C': d'après cela, on a conclu

$$C = 18393 \text{ mèt.}$$

et

$$C' = 18336.$$

Formules.

En appelant

D, la différence des logarithmes (logarith. $H - \log.\ h\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)$),

τ, le facteur $(1+0{,}002(t+t'))$ relatif à la température,

m, le module des log. tabulaires (0,4342945);

la première formule devient

$$x = C\tau D = 18393\,\tau D \ldots (A),$$

et la seconde, en dégageant x

$$x = \frac{C'\tau D}{1-\frac{C'\tau}{a}(D+2m)} = \frac{18336\,\tau D}{1-\frac{18336\,\tau}{a}(D+2m)} \ldots (B),$$

ou, à très-peu près

$$x = 18336\,\tau D\left\{1+0{,}00288\,\tau(D+2m)\right\}.$$

M. de la Place, il est vrai, n'a donné que cette dernière (B) dans sa *Mécanique céleste*: la première (A) a été publiée par M. Ramond;

mais elle a été déduite des principes établis dans *l'Exposition du système du monde*, et a été revue par l'illustre auteur de ce sublime ouvrage.

Méprise de quelques savans.

Quelques savans, ayant vraisemblablement perdu de vue la manière dont ces coefficiens avaient été déterminés, ont cru que 18336 m., qui est celui de la formule dans laquelle on a égard à la variation de la pesanteur, était également celui des formules, où la pesanteur est considérée comme constante et partout égale à ce qu'elle est au niveau de la mer : ils ont, en conséquence, regardé le facteur complexe $\{1+0{,}00288\,\tau.(D+2m.)\}$ comme n'exprimant que l'effet de la diminution de la pesanteur à mesure qu'on s'élève ; et ils ont donné pour formule, dans les cas où l'on ne tiendrait pas compte de cette diminution,

$$x = 18336\,\tau\,D$$

au lieu de

$$x = 18393\,\tau\,D.$$

Ce qui, comme on le voit par la simple comparaison des coefficiens, donne des erreurs de plus de 5 mèt. sur des hauteurs de 1800 m. : erreurs bien au-dessus de celles inévitables dans la pratique, et qui, en attenuant le mérite des formules de M. de la Place, font attribuer, à la variation de la pesanteur, des effets beaucoup plus grands que ceux qu'elle est réellement en état de produire.

Estimation de l'erreur commise en regardant la pesanteur constante.

J'ai trouvé, par le calcul que je vais indiquer, que *l'erreur que l'on commet, dans la mesure d'une hauteur, en regardant la pesanteur prise au niveau de la mer comme constante, est,*

à très-peu-près, à cette hauteur, comme cette même hauteur est au rayon de la terre. En effet, soit P le poids d'une colonne de matière incompressible, et dont les molécules sont soumises à l'action de la pesanteur regardée comme constante ; P' celui d'une pareille colonne, mais dont les molécules sont soumises à la pesanteur variable ; x leur hauteur commune, g la pesanteur au niveau de la mer ; g' celle en x. On aura (les densités et les bases des colonnes étant égales)

$$P : P' :: \int g\,dx : \int g'\,dx.$$

Puisque la pesanteur diminue en raison inverse du carré des distances au centre de la terre, on a

$$g : g' :: (a+x)^2 : a^2$$

ou, à cause de $\frac{x^2}{a^2}$ extrêmement petit,

$$g' = g\,\frac{a^2}{a^2+2ax} = g\,\frac{1}{1+\frac{2x}{a}} = g\left(1-\frac{2x}{a}\right).$$

Mettant cette valeur de g', dans la proportion ci-dessus ; intégrant et réduisant, je trouve

$$P : P' :: x : x-\frac{x^2}{a}.$$

Les poids, ou densités moyennes, de deux colonnes d'air, qui seraient dans le même cas, que celles désignées par P et P', doivent, *à très-peu de chose près*, suivre le même rapport ; et comme, en général, les hauteurs de deux colonnes d'air du même poids, c'est-à-dire indiquées par le même abaissement du baromètre, sont en raison inverse de leur densité moyenne, si x représente une hauteur déterminée dans la supposition que la pesanteur est constante et partout égale à g, $x+\frac{x^2}{a}$ (1) représentera la hauteur correspondante au même abaissement du mercure, en ayant égard à la diminution de la pesanteur. Ainsi la différence $\left(\frac{x^2}{a}\right)$, ou l'erreur provenant de la supposition, sera, comme nous l'avons annoncé, le quatrième de la proportion $a : x : x : \frac{x^2}{a}$.

Je remarquerai que cette différence est la moitié de celle qui existe entre la pesanteur au niveau de la mer, et celle au haut de la colonne ; puisque ces deux pesanteurs sont entr'elles comme

$$(a+x)^2 : a^2 \text{ ou } x+\frac{2x^2}{a} : x.$$

Un simple aperçu faisait voir que cela devait à-peu-près être ainsi.

Il suit de ce que nous venons de dire que les plus grandes hauteurs qui existent sur le globe (le Chimboraço) n'étant pas la millième partie du rayon terrestre ; l'erreur que l'on commettrait dans leur mesure, en regardant la pesanteur comme ayant partout la même intensité qu'au niveau de la mer, ne serait pas d'un millième. Pour une hauteur de 1800 m., elle sera de 5 décimètres et non de 5 mèt.

Le coefficient 18393 m. n'est pas, il est vrai, tout-à-fait celui qu'on doit prendre, lorsqu'on suppose la pesanteur toujours égale à ce qu'elle

(1) Tous les termes qui renferment $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ pouvant être négligés sans qu'il en résulte aucune erreur, nous transformons le rapport $x-\frac{x^2}{a} : x$ en $x : x+\frac{x^2}{a}$.

est au niveau de la mer : ayant été déterminé de manière à donner exactement une hauteur de près de 3000 m. au-dessus de l'Océan (celle du pic du midi) ; il est affecté de l'action de la pesanteur telle qu'elle se trouve aux hauteurs de 14 à 1500 m. Mais par cela même, il convient encore mieux à la formule $x=C.\tau.D$, lorsqu'on l'emploie pour avoir la hauteur des montagnes : il est en partie corrigé de l'erreur provenant de la supposition que la pesanteur est une force constante ; et je me suis assuré, par le calcul, qu'en le faisant servir à la mesure de toutes les hauteurs, depuis le niveau de la mer jusqu'à 4000 mèt. d'élévation, les valeurs de x qu'il indiquait ne différaient pas de 4 décimètres, des hauteurs véritables, c'est-à-dire, de celles conclues de la formule (B). Ainsi, c'est à ce coefficient qu'il faut se fixer lorsqu'on veut regarder la pesanteur comme constante.

Vrai coefficient de la formule (A) réduit au niveau de la mer.

Pour déterminer celui qu'il faudrait employer, en supposant partout à la pesanteur la même intensité de force qu'au niveau de la mer, j'ai fait usage des deux formules (A) et (B) de M. de la Place. J'ai pris deux stations ; l'une au niveau de la mer, où le baromètre était supposé se tenir à 0,763 m., et l'autre en un point où cet instrument était à 0,762 m. ; la température étant, à l'une et à l'autre, de 15°. : j'ai trouvé, par la formule (B), que la hauteur x, ou différence de niveau entre les deux stations, était de 11,09834 m. J'ai pris ensuite la formule (A)

$$x = C.\,.D$$

qui est rigoureusement applicable à ce cas ;

puisqu'à la petite hauteur de 11 m., la pesanteur n'a pas sensiblement varié, du moins assez pour affecter d'une unité le 6e. chiffre du coefficient, et qu'il faut se borner aux 5 premiers. Mettant dans cette formule, à la place de x, la valeur trouvée par la formule (B), on a C, ou coefficient au niveau de la mer, égal à

18384,8 ou 18385 mèt.

D'après ce que nous avons dit plus haut sur l'effet de la diminution de la pesanteur, on peut, à peu de chose près, établir pour formule générale

$$x = 18385 \tau D \left(1 + \frac{18385 \tau D}{a}\right)$$

ou

$$x = 18385 \tau D (1 + 0{,}00289 \tau D) \ (1).$$

Le facteur complexe exprime ici l'effet de la diminution de la pesanteur, à partir du niveau de la mer : on le négligerait, si on voulait regarder la pesanteur comme constante.

(1) Les résultats de cette formule ne diffèrent pas d'un dix millième de ceux de la formule (B). Différence qu'on peut estimer nulle dans la pratique.

ERRATUM.

Page 199, *lig.* 2, $\frac{Q'nr^{v}}{r}$; *lisez* $\frac{Q'nr^{v}\pi}{2r}$; expression susceptible d'une détermination plus rigoureuse.

JOURNAL DES MINES.

N°. 124. AVRIL 1807.

RECHERCHES

SUR DIFFÉRENS PRODUITS VOLCANIQUES.

Par M. P. Louis Cordier, Ingénieur des Mines.

Étant sur le point de publier la description de plusieurs contrées volcaniques, je me suis aperçu que nos connaissances générales sur les matières rejetées par les feux souterrains, étaient incomplètes à plusieurs égards. Je me suis dès-lors occupé de remplir les lacunes. Quelques-unes de mes recherches ne sont pas encore terminées; mais les autres m'ont conduit à des résultats satisfaisans : je vais rendre compte de ces dernières, en suivant tout simplement l'ordre dans lequel elles ont été faites.

§. I.

Des sables ferrugineux volcaniques.

Ces sables proviennent du lavage des terrains volcaniques : on les trouve dans le lit des ruisseaux et des rivières, au bord des lacs et sur