On sent, d'après cela, combien M. Tassaert a rendu service aux chimistes, aux métallurgistes, et aux minéralogistes français, en traduisant dans leur langue les Mémoires de Klaproth. Il eût été à désirer que le savant traducteur eût aussi bien possédé la nomenclature minéralogique française qu'il possédait la chimique. On aurait souhaité qu'il eût toujours conservé, sur le titre de chaque Mémoire, le nom allemand du minéral qui en était l'objet, et qu'il l'eût traduit par le synonyme adopté dans les derniers Traités de Minéralogie qui ont paru en France. Il aurait pu traduire les termes techniques des minéralogistes allemands, par les termes également techniques, à l'aide desquels les minéralogistes français les rendent.

Le dernier volume des Mémoires de Klaproth a paru à Berlin en 1802. On imprime actuellement, dans cette même ville, le volume qui contient les Mémoires qui ont paru depuis ; et il faut espérer que M. Tassaert s'empressera d'en joindre la traduction à celle des volumes précédens, et de travailler encore de cette manière aux progrès d'une science à l'avancement de laquelle il a contribué par ses propres travaux. Il pourra profiter de cette occasion pour ajouter à ce volume une table générale faite d'après la nomenclature minéralogique allemande et la nomenclature française.

---

*Nota.* La description de la mine du Huelgoat était déjà imprimée, lorsque de nouveaux renseignemens, que M. Duchesne m'a envoyés, m'ont appris que la longueur des anciennes *schwingues* de la machine supérieure était de 1,868 mèt. et non de 1 m. comme il m'avait été dit sur les lieux.


# JOURNAL DES MINES.

N°. 123. MARS 1807.


## EXPÉRIENCES

*Faites sur les Machines hydrauliques des mines de* Poullaouen ; *ayant pour objet de déterminer, à l'aide d'un dynamomètre, la charge de ces Machines, et de faire connaître le rapport entre l'effet produit et l'eau motrice dépensée.*

Par M. Blavon-Duchesne aîné, Directeur des Mines de Poullaouen ; et M. Daubuisson, Ingénieur des Mines et Usines.

1. Messieurs Beaunier et Gallois, ingénieurs des mines de l'Empire, étant, en 1801, aux mines de Poullaoen, en Bretagne, y firent faire un dynamomètre dans l'intention de l'employer à déterminer les résistances que les machines, en usage dans les exploitations souterraines, ont à vaincre dans leurs mouvemens ; mais le tems ne leur permit pas d'exécuter ce projet.

Me trouvant cinq ans après sur le même établissement, nous entreprîmes, M. Duchesne et moi, de graduer cet instrument, et de peser, par son secours, la charge que portent les pistons des pompes employées à l'épuisement des eaux, afin de voir jusqu'à quel point les résultats de l'observation approcheraient de ceux du calcul. Je désirais, en outre, depuis long-tems, faire quelques expériences sur le rapport qu'il y a entre l'effet réel des machines mues par le poids de l'eau, et la quantité de ce fluide qu'elles dépensent : j'espérais en tirer quelques données qui pussent mettre à même de conclure, avec une exactitude suffisante pour la pratique, l'effet que le mineur peut se promettre d'un courant d'eau qu'il a à sa disposition.

M. Duchesne, directeur aussi éclairé que judicieux, sentait trop combien ces diverses expériences, tant les *dynamométriques* que les autres, pouvaient fournir des résultats utiles à l'art des mines, pour ne pas attacher de l'importance à les faire avec tout le soin possible : et c'est aux mesures qu'il prit à cet égard, que l'on est redevable de l'exactitude que nous avons pu mettre dans un travail qui en est d'ailleurs peu susceptible.

## PREMIÈRE PARTIE.

### *Expériences faites, à l'aide du Dynamomètre, sur la charge des Machines.*

Dimensions du dynamomètre.

2. Le dynamomètre qui a servi à nos expériences est de forme ordinaire, et à peu près semblable à celui représenté tome 17 de ce Journal, *pl. I*, *fig. I* et *II*. (*Voy. ce tome.*)



Il pèse environ 10 kilogrammes : ses principales dimensions sont, ainsi qu'il suit :

| | |
|---|---|
| Longueur hors d'œuvre. . . . . . | 0,745 mèt. |
| Longueur dans œuvre. . . . . . . | 0,677 |
| Largeur des lames, au milieu . . . . | 0,081 |
| Largeur des lames, aux extrémités. . . | 0,074 |
| Epaisseur des lames, au milieu. . . . | 0,009 |
| Epaisseur des lames, aux extrémités.. . | 0,014 |
| Distance entre les lames, au milieu. . | 0,088 |
| Distance entre les lames, aux extrémités. | 0,043 |
| Diamètre de la partie qui joint les lames. | 0,034 |

Nous allons d'abord faire connaître le mode que nous avons employé pour graduer cet instrument; et comme la connaissance des tâtonnemens que nous avons été obligés de faire pour en venir à bout, pourra en éviter de pareils à ceux qui auront par la suite à graduer des dynamomètres destinés à supporter des poids très-considérables, nous allons entrer ici dans quelques détails à ce sujet. Nous exposerons ensuite les expériences que nous avons faites, et terminerons cet article par la comparaison de leurs résultats avec ceux du calcul.

#### *Graduation du Dynamomètre.*

Le moyen le plus exact que nous avions d'opérer cette graduation était de faire *directement* porter au dynamomètre différens poids. Nous résolûmes, en conséquence, de l'employer aussi long-tems qu'il nous serait possible, avant d'avoir recours aux leviers et autres moyens indirects.

3. Nous suspendîmes l'instrument au milieu d'une des poutres, qui supportent le toit de la fonderie : cette poutre était soutenue, dans

Première graduation.

son milieu, par deux piliers distans d'un mètre l'un de l'autre. On posa un madrier sur la partie qui était comprise entre les deux piliers : on fit passer dessus une forte chaîne, à laquelle on fit faire plusieurs tours. Un crochet en forme de S saisissait, par son extrémité supérieure, deux branches de la chaîne, et portait le dynamomètre par son extrémité inférieure.

A l'aide d'un semblable crochet et d'une corde, on fit porter à l'instrument d'abord 1, puis 2, puis 3 quintaux (1), et successivement jusqu'à 10 : à chaque quintal que l'on ajoutait, on faisait une marque sur le limbe du dynamomètre, au point où se fixait l'aiguille. On détacha ensuite la corde et on lui substitua une grosse balance dont on se servait dans l'usine, pour peser les saumons de plomb. On la chargea graduellement, quintal par quintal, jusqu'à 40 quintaux, en marquant chaque fois sur le limbe le point où l'aiguille s'arrêtait. Lorsqu'il y avait sur la balance 20 poids (d'un demi-quintal chacun), on les ôtait et on les remplaçait par des saumons. On ne gradua plus que de 5 en 5 quintaux, depuis 40 jusqu'à 110. A ce point, l'aiguille avait déjà parcouru la moitié du limbe : elle avançait d'environ 2 mill. par quintal; tandis qu'au commencement, elle avançait de plus de 4. De 110 à 125 quint., les espaces parcourus diminuant dans un rapport bien plus grand que précédemment, nous craignîmes que le ressort n'eût perdu de son jeu : nous déchargeâmes jusqu'à 90 quintaux, et rechargeâmes de nouveau jusqu'à 125 ; mais l'aiguille revint toujours au même point, lorsque la balance portait le même poids. En continuant de charger, une secousse fit casser le crochet qui supportait la balance : heureusement aucun des ouvriers employés au chargement ne se trouva dessous.

(1) Les poids employés pour la graduation étant des quintaux, ancienne mesure, nous ne les réduirons point en myriagrammes, afin d'éviter les fractions.



Seconde graduation.

4. Trois jours après, les crochets étant refaits, les parties qui avaient fléchi dans la première opération étant renforcées, nous continuâmes, par le même moyen, à graduer jusqu'à 150 quint. Depuis 120 jusqu'à 150, les espaces parcourus par l'aiguille diminuaient en progression arithmétique, et à peu près d'un millimètre par 4 quint. ; de 140 à 150 l'espace parcouru ne fut que de 6 millimètres ; ainsi, nous étions au moment de voir l'aiguille devenir stationnaire, malgré l'augmentation du poids; cependant les lames du ressort (dynamomètre) qui pouvaient se rapprocher de 45 millimètres, ne l'étaient pas encore de 9 : ce qui nous fit craindre quelque cause d'erreur que nous n'apercevions pas. Pendant qu'éloignés de la machine, nous nous demandions quelle pouvait être cette cause, le crochet qui portait le dynamomètre, avec un poids de 160 quintaux, cassa. Cet accident nous détermina à renoncer à ce mode de graduation, que nous ne pouvions continuer sans danger, et qui d'ailleurs nous inspirait peu de confiance : nous ne comptions que sur l'exactitude des divisions au-dessous de 100 quintaux.

Cependant nous entreprîmes, le 30 août et le

5 septembre, avec l'instrument ainsi gradué, deux suites d'expériences, dont nous parlerons plus bas.

Désirant ensuite vérifier notre instrument et pousser la division aussi loin que possible, nous essayâmes d'employer un levier.

Troisième graduation.

5. Nous fîmes disposer en bras de romaine une barre de fer de 2,3 mèt. de long, 0,044 m. d'épaisseur, et ayant 0,122 m. dans l'endroit le plus large : on plaça en cet endroit un boulon. On disposa convenablement, sur ce levier, deux points; l'un pour y suspendre un plateau de balance, et l'autre pour accrocher l'extrémité supérieure du dynamomètre : le premier était à 1,083 m. du boulon, et le second à 0,217; ainsi, les deux bras du levier étaient entre eux comme 5 à 1. Cette espèce de romaine fut établie entre les deux piliers de la fonderie, dont nous avons déjà parlé. Sous la partie où était le crochet qui devait saisir le dynamomètre, on plaça, sur le sol de l'usine, une grosse pièce de bois, que l'on chargea de 300 quintaux de plomb, et au milieu de laquelle on fixa un autre crochet destiné à tenir l'extrémité inférieure du dynamomètre.

D'après ce que nous avons dit, on devait croire qu'à chaque quintal qu'on mettrait dans le bassin que portait la romaine, l'aiguille de l'instrument en indiquerait 5 sur la division déjà tracée; mais, à notre grand étonnement, elle n'en marqua que $4\frac{1}{2}$, et ensuite un peu moins, jusqu'à 110; soit que le point d'appui ne divisât pas le levier exactement dans le rapport de 5 : 1; soit que les distances qui entraient dans l'expression du *moment* des deux efforts ne



fussent pas dans ce rapport (1); soit que le frottement empêchât la puissance d'exercer toute sa force sur la résistance, etc. De plus, le poids de 300 quint., qui était sur le sol, ayant produit un petit affaissement, dérangea les points de suspension. Enfin, lorsque le plateau de balance fut chargé de 25 quintaux, le bras de romaine se fendit, et menaça de casser. Tous ces inconvéniens nous forcèrent à nous désister de toute poursuite ultérieure.

J'observerai ici que ces opérations sont dangereuses; il faut manier des poids énormes; les suspendre; se tenir auprès d'eux, et des instrumens de suspension. Je crois en outre qu'on ne pourra jamais bien graduer un dynamomètre, de manière à le rendre propre à des expériences dont on puisse tirer des résultats suffisamment exacts pour servir comme de données à une théorie, qu'en y suspendant directement des poids. Dès qu'on emploiera des machines intermédiaires, on aura à tenir compte des frottemens et d'un grand nombre de circonstances qu'il est bien difficile de soumettre à des déterminations exactes. Le levier est le plus simple des machines; et cependant il nous a présenté trois causes (la flexibilité de ses bras, le frottement sur les tourrillons, la variation dans l'obliquité de l'effort), qui ont réduit à $4\frac{1}{2}$ : 1 le rapport 5 : 1.

Tel était l'état des choses, lorsque je suis parti de Poullaouen. Depuis, M. Duchesne s'est aperçu qu'une des causes de l'irrégularité que nous avait présenté l'aiguille dans sa marche, venait du petit repoussoir à char-

(1) Le poids que porte le levier à une extrémité agit toujours verticalement; mais il n'en est pas de même de la résistance qu'oppose le dynamomètre, lequel en s'allongeant plus ou moins, doit exercer un effort dans une direction plus ou moins oblique, et dont le *moment* ne varie pas dans le même rapport que celui du poids.

nière qui la faisait mouvoir ; il lui en a fait substituer un autre qui n'avait pas le même inconvénient.

6. Il a essayé de graduer de nouveau l'instrument à l'aide du même levier dont nous nous étions déjà servis, et auquel il avait ajouté quelques perfections ; mais le succès n'a pas répondu à son attente. Au lieu de 0,2 de quintal qu'il fallait à l'extrémité du long bras, pour que l'aiguille parcourût l'espace correspondant à un quintal, il en a fallu 0,21 dans les commencemens, et 0,22 vers 120 q. Il s'est alors décidé à refaire en entier une nouvelle graduation, en suspendant directement des poids au dynamomètre ; mais au lieu de le faire à l'aide d'une balance, il s'est contenté d'un simple plateau, qu'il a fait faire d'une solidité suffisante, et qu'il a suspendu par des chaînes doubles en force. Voici les détails de cette quatrième et dernière graduation, tels qu'il me les a communiqués.

Quatrième graduation.

7. « Le fond du plateau a été recouvert de madriers de 7 pieds (2,3 m.) de longueur, afin d'avoir une plus grande surface pour contenir la quantité nécessaire de saumons de plomb : le tout a été exactement pesé ; et avant de le fixer à l'instrument, celui-ci a été gradué par quintaux jusqu'à 1 millier (10 quint.), au moyen de poids de 100 liv. suspendus par un bout de corde. Mais qu'elle a été m'a surprise, lorsque j'ai vu que cette graduation ne s'accordait point avec la première ; le nouveau millier ne faisait monter l'aiguille qu'à 9 quint. de l'ancienne division. En réfléchissant sur cette variation, j'ai jugé qu'elle ne pouvait


provenir que du changement qui avait été fait au repoussoir : la suite m'a prouvé que je ne m'étais pas trompé ; mais avant de continuer, il m'a fallu annuller toute la première graduation, pour recommencer de nouveau. Après avoir marqué les 10 premiers quintaux de la manière que j'ai indiqué, j'ai fait suspendre le plateau au dynamomètre, et j'ai complété par des poids ce qui manquait pour ramener l'aiguille à la marque 10 quint. J'ai continué la graduation par quintaux jusqu'à 50 ; et puis par quart de millier ($2 \frac{1}{2}$ q.), jusqu'à 180 : ce qui est la plus forte charge que l'instrument puisse supporter sans forcer le repoussoir à charnière qui fait mouvoir l'aiguille. J'ai répété deux fois cette expérience ; et ayant obtenu les même résultats, j'ai été certain de son exactitude ».

*Expériences.*

8. Le but de nos expériences étant de faire connaître la charge des machines hydrauliques, qui, à l'aide de pompes, servent à l'épuisement des eaux de filtration qui se rassemblent au fond de la mine. Le moyen qui nous a paru le plus propre d'en venir à bout, a été de suspendre directement au dynamomètre, un des tirans verticaux auquel sont adaptés les pistons des pompes d'une de ces machines, et de faire aller par le moyen de ce tirant, d'abord une pompe, puis une seconde, puis une troisième, etc., jusqu'à ce que la machine eût sa charge ordinaire ; en tenant note de l'indication du dynamomètre dans chacun de ces cas. Nous voulions en outre faire varier la vitesse,

la charge restant la même, pour voir si l'instrument indiquerait quelque différence; selon que le mouvement serait plus ou moins prompt.

Machine. 9. La grande machine du puits St.-Sauveur étant celle qui nous offrait le plus de facilités, a été choisie pour ces diverses expériences.

Nous avons déjà donné, (voy. p. 51 et suiv. de ce volume) une description sommaire de cette machine; nous nous bornerons à rappeler que la roue à augets qui la met en mouvement, est à une quarantaine de mètres au Nord du puits, qu'elle a 11,4 m. de diamètre, que le rayon du cercle décrit par sa manivelle est de 0,73 m.: qu'elle transmet le mouvement à l'aide de deux tirans horizontaux, lesquels aboutissent à deux leviers angulaires ou varlets, qui sont placés au-dessus du puits; et enfin que c'est aux extrémités de ces varlets que sont suspendues, par des chaînes, les tirans verticaux qui mettent les pompes en jeu.

Nous allons donner ici les dimensions du tirant occidental, qui est celui qu'on a suspendu au dynamomètre; et celles des pompes qu'il fait mouvoir.

| | |
|---|---|
| Longueur du tirant. . . . | 98,0 mètres. |
| Équarrisage. . . . . . | 0,1354 m. |
| Poids des ferrures du tirant. | 65,6 myriag. |

*N. B.* Ce tirant est composé de 18 pièces; les quatre premières, qui sont en bois de chêne, font 26 m. de longueur; les autres sont en sapin.

Toutes les pompes, ainsi que nous l'avons dit ailleurs, sont en bois; le corps de pompe seulement est en fonte et a 0,325 m. de diamètre, tantôt un peu plus, tantôt un peu moins; sa



longueur, y compris celle des deux cylindres de bois entre lesquels il est adapté, est de 2,9 m. Les tuyaux d'aspiration sont composés de trois pièces, et ont 0,13535 m. de diamètre. Le piston est en bois garni de cuir, sa tige est en fer; il pèse 3,85 myriagrammes. La levée, ou jeu du piston, est de 1,453 m. Voici, à partir de la galerie d'écoulement, le diamètre (du corps de pompe), et la hauteur de chacune des sept pompes que fait mouvoir le tirant occidental; la hauteur est prise du niveau *moyen* de l'eau dans le petit réservoir où plonge le tuyau d'aspiration, jusqu'au point de décharge.

| | | |
|---|---|---|
| 1re. pompe. | Diamètre. . . | 0,3293 m. |
| ——— | Hauteur. . . | 9,940 |
| 2e. pompe. | Diamètre. . . | 0,3271 |
| ——— | Hauteur. . . | 10,661 |
| 3e. pompe. | Diamètre. . . | 0,3248 |
| ——— | Hauteur. . . | 9,764 |
| 4e. pompe. | Diamètre. . . | 0,3226 |
| ——— | Hauteur. . . | 9,628 |
| 5e. pompe. | Diamètre. . . | 0,3271 |
| ——— | Hauteur. . . | 9,745 |
| 6e. pompe. | Diamètre. . . | 0,3248 |
| ——— | Hauteur. . . | 9,452 |
| 7e. pompe. | Diamètre. . . | 0,3248 |
| ——— | Hauteur. . . | 9,745 |

10. Toutes les fois que nous avons voulu faire des expériences, nous avons commencé par faire mettre en bon état toutes les parties de la machine; nous avons fait graisser toutes celles qui frottent les unes contre les autres, et réparer les pistons. Je suis descendu préalablement dans la mine, pour m'assurer que les pompes ne perdaient point l'eau qu'on leur donnait à élever, et que, conformément aux ordres donnés, Dispositions.

par M. Duchesne, aux maîtres mineurs et machinistes, on avait conduit au puits St.-Sauveur une quantité suffisante d'eau pour que les pompes n'en manquassent pas durant nos expériences. Pendant toute la durée de l'opération, il y avait un machiniste auprès de chaque pompe en jeu; il veillait à ce qu'elle *versât à plein*, à chaque coup de piston; il réparaît de suite les accidens qui pouvaient survenir et empêcher qu'il n'en fût ainsi à chaque expérience: le maître machiniste ou moi, nous descendions dans le puits pour voir si toutes les pompes en jeu *versaient à plein*, et l'on ne prenait aucune indication du dynamomètre qu'un de nous deux n'eût donné cette assurance (1).

M. Duchesne avait également fait des dispositions pour avoir toujours une quantité d'eau motrice suffisante.

Lorsque tout était en état, et que nous voulions commencer notre opération, on arrêtait la machine, on décrochait les pistons de toutes les pompes, et on enlevait la pièce supérieure du

(1) Tous ceux qui connaissent les équipages de pompes en usage dans les mines, sentiront combien toutes ces précautions étaient nécessaires, et combien des expériences de la nature de celles que nous avions entreprises étaient difficiles à bien faire. Ces pompes, lorsqu'on veut les faire verser entièrement plein, ce qui était ici absolument nécessaire, laissent, à chaque instant, échapper de l'eau, soit qu'un peu d'air s'introduise par les nombreuses jointures des tuyaux, soit que le piston, en s'usant ou se dégradant, laisse, lorsqu'il monte, repasser au-dessous de lui une portion de l'eau qui était déjà au-dessus, etc. Alors, l'eau élevée par la pompe qui est immédiatemment au-dessous, n'étant pas prise en entier par la pompe défectueuse, retombe dans le puits et mouille les ouvriers qui s'y trouvent. Ainsi, pendant cinq heures que duraient nos expériences, les machinistes étaient continuellement mouillés à leur poste. On sent, dans cet état, combien des ouvriers, pour qui de pareils essais sont sans intérêt, et absolument étrangers à leur routine, doivent mettre de négligence et de mauvaise volonté dans l'exécution de ce qui leur est prescrit. Cependant, grâces aux soins de M. Duchesne, je n'ai eu qu'à me louer des personnes que nous avons employées: elles ont fait tout ce qu'on en pouvait raisonnablement attendre.



tirant occidental. A sa place et à la chaîne qui tient au varlet placé au-dessus du puits, on suspendait le dynamomètre: et à l'extrémité inférieure de cet instrument, on adaptait, à l'aide d'un boulon, une nouvelle pièce de tirant, de quelques décimètres plus courte que celle qu'on avait enlevée: de cette manière, le tirant entier était porté par le dynamomètre.

Cela fait, nous faisions remettre la machine en mouvement; nous prenions note de sa vitesse, et du poids marqué par l'aiguille de l'instrument. Ensuite nous faisions accrocher une pompe; et lorsqu'elle était bien en train, et que nous étions assurés qu'elle *versait à plein*, nous notions et sa vitesse et le poids. Après cela, nous faisions accrocher une second pompe, puis une troisième, ainsi de suite, jusqu'à ce que la charge fût complète: à chaque fois, nous tenions compte du poids et de la vitesse que nous faisions varier à volonté, par la plus ou moins grande quantité d'eau donnée à la roue.

Premières expériences.

11. Notre première suite d'expériences fut faite le 30 août (1806). Mais comme en les faisant, nous observâmes quelques circonstances que nous n'avions pas prévues, et que nous

entrevîmes quelques moyens de mieux faire ; nous ne les regardâmes, tant pour nous que pour les ouvriers, que comme une répétition, si l'on peut employer ici ce terme : nous résolûmes de les refaire avec encore plus de soin ; ainsi je n'en rapporterai pas le résultat.

Je me bornerai à observer qu'au commencement de chaque levée le dynamomètre recevait comme une secousse qui faisait brusquement monter l'aiguille à une grande hauteur, d'où elle retombait à son vrai point ; elle s'y tenait pendant la seconde moitié de la levée, cependant en tremblottant continuellement ; de sorte que le dynamomètre n'étant divisé que par quintaux, nous ne pouvons guère répondre des indications que nous avons prises qu'à un demi-quintal près (2 à 3 myriagrammes.)

Nous remarquâmes, dans ces premières expériences, qu'en augmentant la vitesse (la charge restant la même) l'aiguille du dynamomètre n'indiquait pas une force plus considérable ; et cependant la partie de la force employée à vaincre l'inertie augmentant lorsque la vitesse augmente, il nous paraissait que l'instrument devait marquer quelques degrés de plus, lorsque la machine irait vite. Nous vîmes même avec étonnement que dans quelques-uns de ces cas, l'aiguille paraissait plutôt indiquer quelques degrés de moins. Cette anomalie, dont je n'entrevois guère la cause, n'est peut-être qu'un accident particulier aux expériences où elle s'est manifestée.

Secondes expériences.

12. Le 5 septembre, nous fîmes 12 expériences. Dans chacune d'elles nous tînmes compte 1°. de la quantité d'eau motrice consommée : je dirai dans la seconde partie de ce mémoire, quel était le moyen que nous mettions en usage pour la connaître ; 2°. de la vitesse de la machine, en notant le nombre de secondes que la roue employait pour faire quatre ou cinq tours ; 3°. de l'indication du dynamomètre, lequel était divisée d'après les deux premières graduations dont nous avons rendu compte. M. Duchesne observait les vitesses, et faisait continuellement examiner, sous ses yeux, par le maître serrurier de l'établissement, l'aiguille du dynamomètre. Avec le maître machiniste, je réglais la quantité d'eau qui tombait sur la roue, et allais, dans la mine, voir si les pompes *tiraient à plein*.



Troisièmes expériences.

Je vais donner dans le tableau suivant, les résultats de nos observations ; j'y marquerai 1°. la *charge* que portait le dynamomètre : elle se composera, dans chaque expérience, de la charge de l'expérience précédente, plus une certaine quantité que j'indiquerai ; 2°. la vitesse, en exprimant le nombre de *levées*, ou tours de la roue, par minute : 3°. l'indication de l'instrument en myriagrames. Il est inutile de faire ici mention de l'eau motrice, quantité dont je n'aurai besoin que dans la seconde partie de ce Mémoire. Je ne parlerai pas non plus des expériences n°. 11 et 12, la graduation du dynamomètre n'ayant pas été à même d'en faire connaître le résultat.

| N° des exp. | CHARGE. | VITESSE. | POIDS. |
|---|---|---|---|
| | | Levée en 1'. | Myr. |
| 1. | Tirant. . . . | 6. . . | 220 |
| 2. | *Idem*. . . . | 8. . . | 218 |
| 3. | *Id.* + 4 pistons. | 6. . . | 245 |
| 4. | *Id.* . . . . | 8. . . | 240 |
| 5. | *Id.* + 7e. pompe. | 4,3 . . | 328 |
| 6. | *Id.* + 6e. pompe. | 4,5 . . | 406 |
| 7. | *Id.* + 5e. pompe. | 4,5 . . | 484 |
| 8. | *Id* . . . . | 3,6 . . | 484 |
| 9. | *Id.* + 3e. pompe. | 3,8 . . | 587 |
| 10. | *Id.* . . . . | 3,3 . . | 587 |

Lorsque le tirant baissait, le dynamomètre ne marquait plus que 215 myriagrammes; ce qui était le poids des tirans et pistons, diminué des frottemens et autres résistances.

On voit, par ces expériences, que l'indication de l'instrument est indépendante de la vitesse.

Troisièmes expériences.

13. Depuis mon départ de Poullaouen, M. Duchesne, après avoir entièrement regradué le dynamomètre, ainsi que nous l'avons dit, a répété, le 19 novembre, toutes les expériences que nous avions faites : voici les résultats qu'il a obtenus.





| N°. des exp. | CHARGE. | POIDS. |
|---|---|---|
| 1. . | Tirant. . . . | 245 myriag. |
| 2. . | *Id.* + 7 pistons. . | 274 |
| 3. . | Tirant + 6 pist. . | 269 |
| 4. . | *Id.* + 7e. pompe. | 352 |
| 5. . | *Id.* + 6e. pompe. | 438 |
| 6. . | *Id.* + 5e. pompe. | 526 |
| 7. . | *Id.* + 4e. pompe. | 612 |
| 8. . | *Id.* + 3e. pompe. | 698 |
| 9. . | *Id.* + 2e. pompe. | 795 |

Dans cette dernière expérience, lorsque le tirant descendait, le dynamomètre indiquait 225 myriag.

M. Duchesne, en me communiquant ces résultats, m'écrit : « En calculant la charge de chaque pompe, vous trouverez quelques différences entre elles ; mais cela peut provenir de ce que le piston se trouve plus ou moins serré dans l'une que dans l'autre, et que d'ailleurs la haute graduation du dynamomètre n'ayant pu être faite que par quart de millier, et l'aiguille éprouvant toujours une légère agitation, qui empêche de bien saisir le point de la charge, il peut en résulter une différence d'un demi-quintal en plus ou en moins. »

On observera que la principale différence entre ces troisièmes expériences et les secondes tombe principalement sur le poids des tirans; ce poids étant donné de 25 myriag. plus fort par les troisièmes : d'ailleurs, les différences d'un terme à l'autre sont à peu près les mêmes : cependant, dans les dernières expériences, on remarque beaucoup plus de régularité. Vraisemblablement les efforts que nous avons fait subir au dynamomètre, dans les premières graduations, et dans les premières expériences, ainsi que les chûtes qu'il a éprouvées, auront altéré le ressort, déplacé le vrai point zéro, et fait que dans les secondes expériences les poids qu'il indiquait n'étaient plus ceux qu'il supportait réellement. Une autre graduation devenait nécessaire, et les résultats des dernières expériences, faites depuis cette nouvelle graduation, portant tous les caractères d'une plus grande exactitude, nous les prendrons pour termes de comparaison dans le parallèle que nous allons faire des résultats du calcul avec ceux de l'observation.

*Résultats de la théorie, et comparaison avec ceux de l'expérience.*

Examinons d'abord les expériences, où le dynamomètre ne portait que le tirant et les pistons.

Poids de l'attirail.

14. D'après ce que nous avons dit sur les dimensions du tirant, et en prenant la pesanteur spécifique du bois de chêne imbibé d'eau = 1,029, et celle du bois de sapin dans le même cas = 0,894, comme des expériences faites à ce sujet l'ont indiqué, on trouve que le poids du tirant, avec ses ferrures, est de 232 myr. Le dynamomètre a indiqué 245. Mais si l'on observe que la détermination du poids par le calcul, suppose, 1°. que dans toute son étendue le tirant a exactement 0,13535 m. d'équarrissage, ce dont certainement on ne peut répondre; 2°. que les ferrures, qui sont sur les 17 jointures du tirant, sont toutes exactement du même poids; car on s'est borné à en peser une, et à conclure de celle-là le poids de toutes les autres; 3°. que la pesanteur spécifique de toutes les portions de chêne et de sapin qui composent le tirant est la même; ce qui ne saurait être, le bois étant, dans les divers endroits, plus ou moins vieux, plus ou moins imbibé d'eau, etc. Si l'on observe, dis-je, que le calcul est fondé sur toutes ces suppositions, on verra que son résultat ne doit être regardé que comme une approximation; et comme il ne diffère que peu de celui de l'expérience, on n'a aucune raison de penser que le poids réel est effectivement moindre que celui indiqué par le dynamomètre. Ainsi nous adopterons ce dernier.



15. Un piston avec sa tige, avons-nous dit, pèse 3,85 myriagr.; d'où nous déduirons que les 7 pèsent 27 myr. L'expérience n°. 2 indique 29; mais comme elle donne en même tems le poids des pistons et leur frottement contre le corps de pompe, nous pouvons en conclure que ce frottement est de deux myriagr., et que, terme moyen, il est de 0,3 myr. pour chaque piston. L'expérience n°. 3 donne un résultat à peu près semblable; elle indique 5 myr. pour le poids et le frottement d'un piston: cette quantité, d'après ce que nous venons de dire, ne devrait être que de 4,15; mais il faut observer que ce piston, qui est celui de la pompe qui verse l'eau dans la galerie d'écoulement, est le plus considérable de tous; et que d'ailleurs nous avons déjà dit que nous ne pouvions répondre, qu'à deux unités près, du dernier chiffre de chaque indication dynamométrique.

D'après tout cela, nous regarderons les 269 myriagr. indiqués par l'instrument, comme exprimant le poids de l'attirail, au moment où l'on a commencé à faire jouer les pompes.

Charge d'un piston.

16. Voyons maintenant quelle sera la charge d'un piston, d'après la théorie.

Lorsqu'une pompe est en mouvement, la charge du piston se compose,

1°. Du poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base celle du piston, et pour hauteur la différence de niveau, entre la surface de l'eau dans laquelle plonge l'extrémité inférieure de la pompe, et le tuyau de décharge.

2o. Du frottement du piston contre les parois du corps de pompe, provenant de la pression produite par la colonne d'eau.

3°. De la résistance provenant du frottement de l'eau contre les parties des tuyaux d'aspiration et du corps de pompe.

4o. De la résistance que l'eau éprouve, en passant du tuyau d'aspiration dans le corps de pompe, par l'étranglement occasionné par la soupape.

5o. De la force nécessaire pour vaincre l'inertie de la masse d'eau à mouvoir.

Déterminons ces diverses quantités dans la septième pompe.

17. 1°. D'abord, d'après les dimensions que nous avons données, on trouve que le poids de la colonne d'eau que porte le piston, est de 80,75 myriagr.; je le diminue de 1,5 myr. (1),

(1) Le terme moyen des observations de M. Duchesne, sur le poids de l'eau déplacée sur un piston, est de 1,41 myr.: à quoi il faut ajouter le poids de l'eau déplacée par environ 1 mèt. de tige. Ce qui fait en tout 1,5 myr.



pour le poids de l'eau déplacé par le piston: ainsi, il reste 78,75.

18. 2°. La détermination du frottement du piston, contre les parois du corps de pompe, ne saurait être assujétie à une théorie rigoureuse, vu qu'on ne peut déterminer la force qui presse le piston contre les parois. Cependant dans les pistons, dont on se sert à Poullaouen, et dans la plupart des mines (1), cette pression étant en partie produite par le poids de la colonne élevée, lui est proportionnelle (dans la même pompe). Des expériences qui ont été faites à ce sujet, ont porté quelques mécaniciens (Langsdorff entre autres) à conclure que, pour ces pistons, lorsqu'ils frottent contre un cylindre de métal, la force nécessaire pour vaincre le frottement et dépendante de la pression de l'eau élevée, est donnée avec une exactitude suffisante par la formule

$$0,1\frac{\pi d^2 h}{4}\left(\frac{d}{d+0,162}+0,162\right)$$

*d* étant le diamètre du piston exprimé en mètres, *h* la hauteur de la colonne d'eau élevée, et $\pi$ le rapport du diamètre à la circonférence $= 3,1416$.

On trouve pour la septième pompe, cette force $= 6,7$ myr., quantité qui me paraît bien

(1) Ces pistons sont de petits cylindres de bois d'un plus petit diamètre que le corps de pompe; ils sont percés dans le milieu d'un trou garni d'une soupape. Leur partie supérieure est entourée d'un collet fait de plusieurs bandes de cuirs cousues ensemble; il dépasse le cylindre de bois, et s'évase en forme d'entonnoir: c'est le bord supérieur de l'évasement qui frotte contre le corps de pompe.

forte, mais que je n'ai aucune raison de rejeter, et que j'adopterai, puisqu'elle est déduite d'une formule basée sur l'expérience.

19. 3°. Pour déterminer la résistance que l'eau éprouve, par son frottement contre les parois des tuyaux dans lesquels elle coule, nous emploierons la formule très-simple dernièrement donnée par M. Prony (1), qui est déduite, à l'aide des théories les plus savantes, d'un grand nombre d'expériences faites avec un soin particulier par MM. Du Buat et Chessy : elle peut être mise sous cette forme

$$\pi\, d\, l\, v(a + b v) \text{ 100 myr.}$$

$d =$ diamètre du tuyau.
$l =$ sa longueur.
$v =$ la vitesse de l'eau.
$a = 0{,}000017.$
$b = 0{,}0003483$ (2).

La vitesse du piston étant 0,109 mèt., cette formule donne 0,002 myriagr. pour le corps de pompe, et 0,044 pour le tuyau d'aspiration : en tout 0,046 myr.

4°. La résistance provenant du passage de l'eau par l'ouverture de la soupape, qui est entre le tuyau d'aspiration et le corps de la pompe, ne peut être qu'extrêmement petite ; elle serait même absolument nulle, si la soupape se levait entièrement ; car ce clapet ne fait que couvrir l'extrémité supérieure du tuyau d'aspira-

(1) *Recherches Physico-Mathématiques sur la théorie des eaux courantes*, §. 18, 1804.

(2) Les valeurs de $a$ et $b$ telles que les donne M. Prony, sont affectées de l'action de la gravité (9,8088 m.) : je les en ai dégagées.



tion : dans tous les cas, cette résistance se trouvant comprise dans l'expression suivante, nous n'en chercherons pas ici de détermination particulière.

20. 5°. Je ne sache pas qu'aucun de nos auteurs se soit occupé de la théorie des pompes en mouvement, et ait donné une expression de la force qu'il faut employer pour vaincre l'inertie de la masse d'eau à mouvoir, et pour imprimer à cette masse une certaine vitesse. Langsdorff, auteur d'un Traité d'hydraulique allemand, a publié, il y a quelques années, une théorie générale des pompes aspirantes, qui l'a conduit à l'expression suivante de la charge que porte le piston,

$$\frac{\pi D^2 h}{4} + \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{(A + B)\, b^2}{2 g t^2 \left(1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b\, e^{bp}}\right)\right)},$$

dans laquelle le dernier terme exprime les résistances, provenant du frottement de l'eau contre les parois des tuyaux, du passage par des étranglemens, et de l'inertie. Dans ce terme :

$D =$ diamètre du corps de pompe ou du piston
$b =$ la longueur de la levée
$t =$ tems de la levée
$e =$ base de logs. hyp. $= 2{,}7183$

$A$. (Quantité dépendant de la résitance de l'eau contre les parois des tuyaux, et déterminée d'après les belles expériences de Dubuat) $= 0{,}03 \left(\frac{l}{d} + L \frac{d^2}{D^2}\right)$.

$B$. (Quantité dépendant de la résistance qui résulte de la contraction de la veine à l'entrée du tuyau d'aspiration, et à la soupape) $= \left(\frac{1}{m^2}-1\right)+\left(\frac{d^2}{m^2\delta^2}-1\right)$.

$m$ = nombre qui exprime le rapport entre la grandeur d'un orifice, et celle de la *veine contractée* qui en sort = 0,82 (1).
$l$ = longueur du tuyau d'aspiration.
$d$ = diamètre de ce tuyau.
L = longueur de la partie de la pompe, dont le diam. = $D$.
$\delta$ = diam. de l'orifice de la soupape

$$p = \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{A+B}{a}$$

$$a = l + \left(L - \tfrac{1}{2}b - 0{,}65\right)\frac{d^2}{D^2}.$$

Ici, nous avons $t = 7$ secondes, et nous estimons $\delta = 0{,}108$ m. D'après cela et les données déjà indiquées, on trouve que ce second terme = 0,083 myr.

Cette quantité est si petite, que j'ai d'abord craint de m'être trompé dans l'application des formules qui me l'ont donnée; j'ai refait jusqu'à deux fois les caculs, et j'ai constamment eu le même résultat. Sans garantir l'exactitude de ces formules, j'observerai que toutes les quantités dépendantes de la vitesse, doivent être bien petites, puisque les changemens de vitesse que nous avons fait éprouver à la machine, n'en ont pas apporté de sensibles dans l'indication du dynamomètre.

(1) *Prony*, d'après Bossut, *Architecture hydraulique*, §. 840.



21. En rassemblant les divers élémens de la charge, nous avons :

| | |
|---|---|
| Pour le poids de la colonne d'eau. . | 78,75 |
| Pour le frottement du piston. . . . | 6,7 |
| Pour les résistances provenant du frottement de l'eau contre les tuyaux, du passage par la soupape et de l'inertie. . . . . . . . . | 0,08 |
| | 85,53 |

La quantité 6,8 ajoutée au poids de la colonne est à très-peu près la douzième partie du poids (80,75) de la colonne entière : et comme cette quantité (lorsque le diamètre du piston est à peu près le même) est proportionnelle à ce poids, nous pourrons en conclure que pour avoir la charge du piston d'une de nos pompes, il faut prendre le poids de la colonne d'eau ayant pour base le diamètre du piston, et pour hauteur la hauteur de la pompe; l'augmenter d'un douzième, et le diminuer de 1,5 myrgr. (pour le poids de l'eau déplacée par le piston).

22. En procédant ainsi, on obtient les résultats indiqués dans le tableau de comparaison suivant :

| Nº. des exp. | RÉSULTATS de l'expér. | RÉSULTATS du calcul. | Différence. |
|---|---|---|---|
| 1. . | 245. . | 245. . | |
| 2. . | 274. . | 274. . | |
| 3. . | 269. . | 269. . | |
| 4. . | 352. . | 355. . | + 3 |
| 5. . | 438. . | 438. . | 0 |
| 6. . | 526. . | 525. . | — 1 |
| 7. . | 612. . | 609. . | — 3 |
| 8. . | 698. . | 695. . | — 3 |
| 9. . | 795. . | 791. . | — 4 |

Conclusion. 23. Cet accord, tout aussi exact qu'on peut le désirer entre les résultats du calcul et ceux de l'observation, nous autorise à conclure que *pour avoir la vraie charge des machines d'épuisement en usage dans les mines, il faut multiplier la base de chaque piston (exprimée en mètres) par la hauteur de la pompe à laquelle il appartient, et par 100 myriagr.; sommer ces produits, augmenter la somme d'un douzième, et ajouter le poids des tirans et des pistons* (1).

J'observerai à ceux qui, frappés de l'accord qui règne entre les résultats du calcul et ceux de l'observation, pourraient penser que j'ai pris mes données de manière à l'obtenir; je leur observerai, dis-je, qu'aucune de ces données n'a été à ma disposition. Les résultats de l'expérience m'ont été envoyés par M. Duchesne; le poids des colonnes d'eau portées par chaque piston, est déterminé d'après le principe le plus certain et le plus élémentaire de la théorie des pompes aspirantes; les deux quantités (6,7 et 0,083) qui expriment le frottement du piston, et les résistances dépendantes de la vitesse, sont déduites de deux formules de Langsdorff, et je ne connois aucun autre auteur qui en ait donné sur ces mêmes objets.

## SECONDE PARTIE.

### *Du rapport entre l'effet produit et l'eau dépensée.*

24. Nous allons, dans cette seconde Partie, chercher :

1°. Une expression analytique de l'effet produit par une machine hydraulique de la nature

(1) Le poids de chaque piston doit être diminué de celui de la quantité d'eau qu'il déplace.



de celle sur laquelle nous avons fait nos expériences, et nous en ferons une application à ces expériences; 2°. une formule, à l'aide de laquelle on puisse déterminer la quantité d'eau motrice nécessaire pour produire un effet donné. 3°. Nous comparerons ensuite les résultats de cette formule avec ceux de l'expérience, et nous donnerons quelques conséquences tirées de cette comparaison.

J'aurais désiré que le tems m'eût permis et de multiplier les expériences, et de faire ensuite les calculs et recherches convenables pour arriver à une théorie propre à donner, dans tous les cas, des résultats suffisamment exacts pour la pratique.

Effet produit par les roues à augets. 25. Qu'on me permette, avant d'aller plus loin, quelques observations sur l'effet des roues à augets; elles me sont suggérées par le titre de cette seconde Partie.

Tout effet est en général proportionnel à la cause qui le produit; et il paraît, d'après cela, que l'effet des machines mues par le poids de l'eau, doit être proportionnel au poids du fluide qu'elles portent, et par conséquent à la quantité d'eau motrice qu'elles dépensent. Mais il faut observer que le fluide que porte une roue à augets, et qui la meut n'agit pas par son *poids absolu*, mais seulement par la *pression* qu'il exerce contre les parties qui s'opposent à sa chûte, c'est-à-dire, qui l'empêchent de prendre la vitesse que la pesanteur communique, ou tend à communiquer, à tous les corps dans leur chûte. Or, il est évident que plus la vitesse de la machine sera grande (plus les augets fuiront vite devant l'eau qui les presse), moins la pression sera forte, et moins la même quantité d'eau devra produire d'effet.

On voit encore que lorsqu'une roue en mouvement porte toujours une même quantité d'eau, sa dépense est proportionnelle à sa vitesse.

Supposons maintenant deux roues d'égales dimensions, portant chacune une même quantité d'eau; mais que la seconde ait une vitesse double de la première : elle dépensera deux fois plus, et cependant son effet ne sera pas double; car, d'après les premiers principes de la dynamique des machines, l'effet est équivalent *au produit de l'effort du moteur par sa vitesse* (1) : or, dans la seconde roue, la vitesse du moteur est bien double ; mais comme, en vertu de cette plus grande vitesse, l'effort lui-même est moindre, en le multipliant par la vitesse, le produit ne sera pas double.

Cet exemple fait voir comment il peut quelquefois arriver qu'avec une plus grande quantité d'eau dépensée, il y ait cependant un moindre effet produit. Il montre, en même tems, l'idée qu'on doit se faire d'une proposition, qu'on trouve quelquefois énoncée ainsi : *une roue hydraulique a d'autant plus de force qu'elle va plus lentement*. Proposition qui n'a lieu que pour un des deux facteurs de l'effet ou de la force de la machine, savoir l'effort du moteur ; car d'ailleurs l'autre facteur augmente toujours dans le rapport de la vitesse, puisque c'est la vitesse elle-même.

Voyons quelle est l'expression de cet effet, et dans quel cas il est le plus grand possible.

Soit $A$ le poids de l'eau portée par la roue, et en vertu duquel elle tend à se mouvoir : ce sera l'effort du moteur, lorsque la machine sera en repos. Nommons $V$ la vitesse que l'eau aurait en tombant librement du canal qui la verse jusqu'au point où elle sort des augets ; l'effort du moteur, pour une vitesse, $v$, de la roue, sera $A\left(1-\frac{v}{V}\right)^2$ (2); et l'effet produit équivaudra à

$$A\left(1-\frac{v}{V}\right)^2 v.$$

Puisque $v$ dépend de $A$, c'est-à-dire de la quantité d'eau que porte la roue, cette expresion, ou l'effet qu'elle représente, sera d'autant plus grand que $A$, sera plus considérable ; et ici on n'aura d'autres limites que celles provenant des dimensions des augets ; ainsi, l'effet d'une roue sera le plus grand, lorsqu'elle portera autant d'eau que la capacité et la disposition de ses augets le permettront. Quant à l'autre facteur $\left(1-\frac{v}{V}\right)^2 v$; lorsque $v$ augmentera, il augmentera aussi jusqu'à un certain terme ; au-delà duquel, il ira en diminuant, $v$ croissant toujours. En différenciant et égalant la différentielle à zéro, nous trouvons $v=\frac{1}{3}V$, pour le cas du *maximum* ; c'est-à dire, que $A$ étant constant (ou la quantité d'eau portée par la roue étant la même), l'effet se trouvera le plus grand, lorsque la vitesse de la roue sera le tiers de celle que l'eau eût acquise, en tombant d'une hauteur qu'on peut, sans erreur notable, supposer égale au diamètre, ainsi que nous le verrons par la suite.

(1) *Prony. Architecture hydraulique*, §. 493.

(2) *Prony. Arch. hyd.* §. 496. Voici le passage de cet auteur : « Supposons qu'un moteur capable d'un effort $F$, quand sa vitesse $u$ est » nulle, ne soit plus capable d'aucun effort lorsque cette vitesse de» vient égale à $U$ : on pourra assez généralement faire l'effort du » moteur égal à

$$F\left(1-\frac{u}{U}\right)^2 \text{»}.$$

Quoique, dans notre exemple, les molécules du moteur, étant indépendantes et animées de diverses vitesses, ne cessent pas d'agir en même tems ; nous admettrons cependant l'expression généralement donnée par M. Prony, comme conduisant à des résultats assez conformes à ceux de l'expérience, ainsi que nous le verrons plus bas.



De là nous pouvons conclure qu'une roue à augets produit le plus grand effet lorsqu'elle porte toute l'eau que ses augets peuvent contenir, et que sa vitesse est le tiers de celle due à la hauteur de son diamètre. — A ce *maximum* de vitesse utile, la roue, sur laquelle nous avons fait nos expériences, ferait 8 tours dans une minute, et elle dépenserait près de 70 m. cub. d'eau dans le même tems.

Je donne un exemple, pour bien faire sentir ce que j'entends ici par le plus grand effet. Supposons que l'on ait une machine d'épuisement semblable à celle que nous avons décrite ; supposons en outre que le courant moteur soit de grandeur indéfinie, et que la vitesse $v$ de la roue soit aussi grande que possible, c'est-à-dire, égale à $V$; ce qui aurait lieu s'il n'y avait aucune espèce de résistance. Si l'on donne maintenant une charge à la machine, la vitesse diminuera ; et elle diminuera d'autant plus qu'on augmentera davantage la charge, c'est-à-dire, le nombre de pompes qu'elle fait mouvoir : enfin, lorsqu'elle ne sera plus que $\frac{1}{3}V$, la roue sera à son *maximum* d'effet, c'est-à-dire, qu'elle élevera le plus d'eau possible, à une hauteur donnée et dans un tems fixé (abstraction faite de toutes les autres résistances). Si on ajoute encore une pompe, la vitesse diminuera, et quantité d'eau élevée à la même hauteur, et dans le même tems, sera moindre.

Les conditions que nous avons indiquées pour que la roue produisît son plus grand effet, peuvent servir à déterminer les dimensions les plus avantageuses qu'il faut donner à ses augets, lorsqu'on connaîtra la hauteur de la chûte et la quantité d'eau fournie par le courant.

J'observerai encore que dans la pratique, la fragilité de la machine et d'autres considérations ne permettent pas de donner à la roue toute la vitesse qu'elle peut avoir.

### *Expression analytique de l'effet produit.*

Ce qu'on entend ici par *effet produit.*

26. On distingue dans les machines, appliquées aux arts, deux effets; *l'effet utile*, qui, dans les machines d'épuisement, par exemple, est d'élever, à une certaine hauteur, une certaine quantité d'eau, dans un tems donné; l'autre, que l'on pourrait appeler *l'effet dynamique*, se compose du premier plus de toutes résistances provenant de la nature et de la disposition des parties de la machine; c'est de ce dernier dont il va être question dans ce mémoire; l'autre, ne peut ici se traiter isolément. Ainsi, sous le nom *d'effet produit*, nous entendons la somme de toutes les résistances que la force motrice a à vaincre pour mouvoir la machine avec une certaine vitesse. Cet effet se compose ici; 1°. de la charge que l'on doit élever; 2°. de la résistance provenant de tous les frottemens occasionnés par la charge, et par le poids des diverses parties de la machine; 3°. de la résistance produite par l'inertie des masses qui ont un mouvement alternatif, et qu'il faut mouvoir avec une certaine vitesse au bout d'un tems donné.

Dans les déterminations qui vont suivre, nous représenterons chacune de ces résistances partielles par une force qui lui ferait équilibre, et



qui serait appliquée à la circonférence de la roue hydraulique.

Détermination de la charge.

27. La charge, telle que nous l'entendons ici, se compose 1°. du poids des colonnes d'eau élevées par les diverses pompes (supposées avoir partout le même diamètre que celui du piston); 2°. du poids des pistons; 3°. des résistances provenant *a*) du frottement des pistons contre les corps de pompes, *b*) du frottement de l'eau contre les tuyaux qu'elle traverse, etc., *c*) et de l'inertie des masses. Nous avons vu, dans la section précédente (n$^{os}$. 16—20), comment on déterminait ces diverses quantités; nous représenterons leur somme par $P$.

28. Cette charge $P$, agissant à l'extrémité d'une manivelle, et toujours dans la même direction, puisqu'elle exerce son action à l'aide d'un tirant horizontal, doué d'un simple mouvement de *va et vient*; cette charge, dis-je, oppose à la force motrice une résistance continuellement inégale, puisque son moment varie à chaque instant : il est 0, lorsque la manivelle commence et finit de *lever*; il est le plus grand possible et égal à $P\,r$ ($r$ étant le rayon de la manivelle), au milieu du mouvement; dans tout autre point, éloigné de $\delta^{o}$. du commencement de la levée, il sera $P\,r \sin \delta$ : et à la fin, la somme des résistances que la force aura eues à vaincre sera la même que si, à chaque instant du mouvement, le moment eût été une moyenne entre toutes les valeurs de $Pr \sin \delta$, prises dans le demi-cercle décrit par la manivelle. Or, cette valeur moyenne est la même que si la direction de $P$ eût toujours été à une distance du centre de rotation, égale à celle du centre de gravité de la

demi-circonférence au centre de rotation, distance qui, comme on sait (1) $= \frac{2r}{\pi}$, $\pi$ étant le rapport du diamètre de la circonférence. Ainsi le moment moyen de la charge, pendant qu'elle pèse sur la manivelle, sera $\frac{2}{\pi} P r$.

29. Observons de plus qu'elle n'est portée par la manivelle que durant le tems que le tirant, auquel elle est adaptée, *lève*, c'est-à-dire, pendant un demi-tour de la roue : elle n'existe plus pendant que le tirant *baisse*. Ainsi, au bout d'un certain nombre de tours, la somme des résistances vaincues par le moteur sera la même que si la machine eût constamment porté le poids $\frac{1}{2} P$ : et nous supposerons qu'il en est réellement ainsi. L'inertie, faisant que la roue conserve sensiblement la même vitesse pendant le tour entier, lorsqu'elle a acquis un certain degré de célérité, quoique le poids qu'elle porte ne pèse sur elle que pendant le demi-tour, permet cette supposition. Nous la faisons par la même raison, qui a autorisé à prendre un moment moyen entre tous les momens de la charge. D'après cela, son vrai moment sera $\frac{P r}{\pi}$.

30. Soit $F'$ la partie de la force motrice ($F$) destinée à faire équilibre à la charge $P$; et $R$ le rayon à l'extrémité duquel elle agit, toujours perpendiculairement (2) ; on aura

$$F' = \frac{P.r}{\pi.R}.$$

(1) Francœur, §. 66.

(2) Ce rayon, $R$, est celui qui va du centre de la roue à son bord extérieur, moins les $\frac{2}{3}$ de la profondeur des augets. C'est lui que nous désignerons habituellement sous le nom de *rayon de la roue*.

Avant



Avant de déterminer le frottement de la machine, lorsqu'elle porte la charge $P$, jettons un coup-d'œil sur celui qui ne résulte que du poids de la roue et de l'attirail (1). Détermination du frottement.

31. Toutes les résistances provenant de ces frottemens se transmettent sur les tourillons qui supportent la roue : elles y produisent une pression, d'où résulte le frottement que nous avons ici à déterminer.

Le poids de la roue agit et pèse directement et verticalement sur ces tourillons. Celui des autres parties de l'attirail (augmenté de l'effort qu'il faut faire pour les mouvoir) agit horizontalement, et transmet sur ces mêmes tourillons une pression égale à la somme des résistances qu'éprouvent les deux manivelles pendant le mouvement. Or, cette pression horizontale est simplement équivalente au poids des deux tirans verticaux. Pour le faire sentir, supposons que la roue soit en mouvement : elle *tirera* un de ces tirans, et *sera tirée*, en quelque sorte, par l'autre. Soit $T$ le poids de chacun d'eux, $m$ l'effort provenant des frottemens sur

(1) Nous désignons ici sous le nom *d'attirail* les parties de la machine comprises entre la roue et les pompes : elles consistent, pour chacune des deux manivelles de la roue, en un tirant horizontal supporté par quatre *schwingues*, en un varlet et un tirant vertical.

Les mineurs appellent *schwingues* (mot allemand qui signifie *balancier*) les pièces de bois verticales qui portent les tirans horizontaux de leurs machines hydrauliques : elles sont fixées à un seuil, par un boulon placé à leur extrémité inférieure, et autour duquel elles oscillent pendant que le tirant *va et vient* : leur extrémité supérieure est assujétie au tirant par un autre boulon.

les tourillons du varlet, des schwingues, etc.
qu'il faut vaincre pour en élever un. La pres-
sion qui en résultera sur la manivelle qui *lève*,
sera $T+m$. La partie de l'attirail qui est adaptée
à la manivelle qui *baisse*, étant également char-
gée, présentera un frottement égal à $m$, sans le-
quel cette manivelle eût été *tirée* avec une force
$T$; elle ne le sera donc plus qu'avec $T-m$, et il
n'en résultera sur son tourillon qu'une pression
à cette quantité. Ainsi, la somme des deux pres-
sions horizontales sera $T+m+T-m$ ou $2T$,
c'est-à-dire, qu'elle sera égale au seul poids des
deux tirans verticaux : et par conséquent que
celle provenant du frottement du reste de l'at-
tirail, se réduira à 0.

Il suit de là, qu'abstraction faite de l'inertie des masses,
tant qu'une machine ne porte aucune charge, et que toutes
les parties de son attirail sont parfaitement équilibrées, la
grandeur des tirans horizontaux ne diminue en rien la force
motrice; et qu'elle peut être augmentée jusqu'à ce que $m$
soit égal à $T$. Mais il n'en est plus de même, lorsqu'il y a
une charge : plus on multiplie les schwingues, plus on aug-
mente les résistances.

En appelant $N$ le poids de la roue, la pres-
sion résultante de ce poids et de celui de l'atti-
rail sera $\sqrt{N^2+4T^2}$. D'après les belles expé-
riences de M. Coulomb, le frottement restant
sensiblement le même, quelle que soit la vitesse
des surfaces frottantes, l'effort qu'il faudra faire
pour vaincre le frottement provenant de cette
pression, sera une quantité constante, dont la
détermination se fera par la méthode que j'in-
diquerai plus bas : soit $p$ cet effort.

Supposons actuellement qu'un des tirans
porte la charge $P$, et déterminons la force né-



cessaire pour vaincre les frottemens provenant de la pression qui en résulte. Nous avons à considérer le frottement, 1°. sur le varlet, 2°. sur les *schwingues*, 3°. sur le tourillon de l'extrémité du bras de la manivelle, 4°. sur ceux qui portent la roue.

32. *Frottement sur le varlet.* Supposons que le bras, à l'extrémité duquel agit la puissance ($Q$), soit vertical, et que l'autre, portant la charge ($P$), soit horizontal. Faisons :

$m$ = longueur du premier.
$n$ = longueur du second.
$r''$ = rayon du tourillon.

S'il n'y avoit point de frottement, la résultante de $Q$ et de $P$ passerait par le centre du tourillon, et en appelant $a$ l'angle qu'elle ferait avec la direction de $P$, ou aurait

$$Q = P\frac{m}{n} = P. \text{ tang. } a.$$

Mais, à cause du frottement, lorsque le varlet tendra à se mouvoir, cette même résultante, partant toujours du point de concours des directions de $Q$ et de $P$, ne passera plus par le centre; elle s'en écartera, en s'approchant de $Q$, jusqu'à ce qu'elle rencontre la surface du tourillon, ou plutôt celle de la chappe qui le porte, en un point, où elle fasse avec cette surface un angle égal à *l'angle du frottement* (1). Alors, le tourillon qui se trouvera placé de

(1) On se rappellera que sous le nom *d'angle de frottement*, on désigne celui qui a pour tangente $\frac{1}{n}$, $n$ étant le rapport du frottement à la pression.

manière que son contact avec la chappe soit à ce point, sera au moment de glisser, et par conséquent le varlet au moment de se mouvoir.

En appelant $d$ l'angle que la résultante dans cette nouvelle position fait avec la ligne passant par le centre, nous aurons

$$Q = P.\ \text{tang.}\ (a + d).$$

Si on imagine une perpendiculaire menée du centre sur la direction de la résultante, et que l'on nomme $e$ l'angle du frottement, on aura

$$\text{sin.}\ d = \frac{r'\ \text{coss.}\ e}{\sqrt{m^2 + n^2}}\ (1).$$

Mais le varlet étant continuellement en mouvement, ne se trouve qu'un instant dans la position que nous avons indiquée, il s'en écarte de droite et de gauche, d'une quantité d'autant plus grande que le bras de la manivelle est plus long. Les distances des directions $Q$ et $P$ au centre du mouvement, qui étaient représentées par $m$ et $n$ dans notre supposition, varient à chaque instant : au commencement et à la fin de chaque oscillation, elles le sont par $m$ coss. $\alpha$ et $n$ coss. $\alpha$; $\alpha$ étant l'angle que les bras font, dans ces deux instans, avec la position ( verticale ou horizontale ) que nous leur avons d'abord supposée : ces mêmes distances, au milieu de l'oscillation, sont $m$ et $n$; ainsi leur valeur moyenne

(1) Le mode de détermination du frottement sur le tourillon du varlet, n'est qu'un cas particulier de celui que nous emploierons pour les tourillons de la roue. (*Voy.* nº. 34.)



sera $m\ \frac{\text{sin.}\ \alpha}{\text{arc}\ \alpha}$ et $n\ \frac{\text{sin.}\ \alpha}{\text{arc}\ \alpha}$. L'angle $\alpha$ est donné par sin. $\alpha = \frac{r}{m}$. D'après cela, on aura

$$\text{sin.}\ d = \frac{r'\ \text{coss.}\ e\ \text{arc}\ \alpha}{\text{sin.}\ \alpha \sqrt{m^2 + n^2}}$$

et l'on a toujours

$$\text{tang.}\ a = \frac{m}{n}$$

et

$$Q = P.\ \text{tang.}\ (a + d).$$

33. Les *schwingues* nous présentent un double frottement : l'un sur les boulons inférieurs autour desquels se font les oscillations, l'autre sur les supérieurs par lesquels elles sont fixées au tirant.

Nous rappellerons que dans les déterminations de ces frottemens, nous n'avons égard qu'à la pression de la charge $P$, ou plutôt de la force $Q$ que nous venons de déterminer.

Cette pression est à son *maximum* au commencement de la levée : son expression est alors $Q$ sin. $\alpha$. Elle est 0, lorsque la schwingue est verticale; ainsi la valeur moyenne sera $\frac{Q.(1 - \text{coss.}\ \alpha)}{\text{sin.}\ \alpha}$: en appelant $r'''$ le rayon du boulon, et $n$ le coefficient du frottement ( rapport du frottement à la pression ), le moment du frottement sera

$$\frac{Q\ (1 - \text{coss.}\ \alpha)\ n\ r'''}{\text{sin.}\ \alpha}.$$

Si l'on nomme $q$ la force destinée à vaincre ce frottement, $\lambda$ la longueur de la *schwingue* : au commencement de la levée, le moment de $q$, sera $q\,\lambda$ coss. $\alpha$; et il sera $q\,\lambda$ lorsque la schwingue sera verticale : ainsi, on aura pour sa valeur moyenne $q\,\frac{\lambda \sin.\,\alpha}{\text{arc}\,\alpha}$ : égalant ces deux momens, et réduisant, on a

$$q = \frac{Q(1 - \text{coss.}\,\alpha)\,n\,r'''\,\text{arc}\,\alpha}{\lambda \sin.^2 \alpha} \quad (1).$$

La force $s$, nécessaire pour vaincre le frottement sur le boulon supérieur aura exactement la même valeur; il faudra seulement mettre le rayon de ce boulon à la place de $r'''$. Nous ferons remarquer que quoique cette force paraisse tangentielle au boulon, elle n'en agit pas moins à l'aide d'un levier représenté par la longueur de la *schwingue* : un peu de réflexion le fera concevoir.

Pour le frottement sur la seconde schwingue, on aurait une valeur de $q'$ semblable à celle de $q$, et une valeur de $s'$ semblable à celle de $s$, à la seule différence, qu'au lieu de $Q$, il faudrait mettre $Q + q + s$. Ainsi de suite pour les autres schwingues.

33. Soit $Q'$ la force $Q$ accrue de toutes les petites forces $q$, $q'$, $s$, $s'$ etc. nécessaires pour vaincre les frottemens sur les boulons des schwingues; elle produira sur le gros boulon ou tourillon qui joint les tirans aux manivelles une pression, d'où il résultera un nouveau frottement, qui sera surmonté par une force égale à $\frac{Q'\,n\,r^{\text{v}}}{r}$, $r^{\text{v}}$ exprimant ici le rayon du tourillon, et $r$ le bras de la manivelle.

Ajoutant cette nouvelle force à $Q'$, la somme ($Q''$) sera la vraie charge que portera la manivelle. En supposant qu'elle est supportée pendant un tour entier de la roue, au lieu de ne l'être que pendant un demi-tour, elle se réduira, d'après ce que nous avons déjà dit n°. 29, à $\frac{1}{2}\,Q''$ : et je la nomme $P'$.

34. Il faut actuellement déterminer la puissance qui, agissant à l'extrémité du rayon $R$, fera équilibre à $P'$, en ayant égard au frottement qui a lieu sur les deux tourillons de la roue, et qui provient des pressions produites, 1°. par la charge $P'$; 2°. par le poids $N$ de la roue, 3°. par celui $2\,T$ des tirans verticaux, 4°. par la puissance $X$ qui doit vaincre tous ces obstacles (1).

Représentons par trois circonférences concentriques (*pl. II.*), celle de la roue, celle décrite par le rayon (*statique*, $\frac{2r}{\pi}$) de la manivelle, et celle du tourillon. Soit $CN$, la direction de $N$; $CT$, celle de $2\,T$; $FP'$, celle de $P'$; $GX$, celle de $X$; soit $L$, la résultante de $N$ et de $2\,T$; $S$, celle de $L$ et de $P'$ (ce sera celle de toutes les résistances à vaincre); $V$, celle de $S$ et de la puissance $X$.

(1) Dans les calculs du frottement des *schwingues*, j'ai employé la méthode la plus simple possible; qui se borne à déterminer, d'après la théorie des momens, la force nécessaire pour vaincre le frottement produit par la seule pression du poids à élever, ce qui n'est pas rigoureusement exact : mais il n'en peut résulter aucune erreur sensible.

(1) Nous allons suivre, dans cette détermination, une méthode à peu près semblable à celle que Bézout a donné en détail, dans son *Traité de Mécanique* (à l'usage de l'artillerie), §. 751 et suiv.

Il est clair que s'il n'y avait point de frottement, cette dernière, qui est celle à laquelle se réduisent toutes les forces et résistances qui agissent sur la machine, passerait par le centre $C$, au moment où le mouvement serait sur le point d'être produit : mais il n'en sera plus de même lorsqu'il y aura frottement, alors cette résultante, partant toujours du point $A$ de concours des forces $S$ et $X$, s'éloignera du centre, en s'approchant de $GX$, jusqu'à ce qu'elle rencontre la surface du tourillon en un point $D$; tel que l'angle $BDa$ soit égal à l'angle du frottement ; alors, ainsi que nous l'avons dit en parlant du varlet, la roue sera au moment de tourner, et, en appelant $x$ et $y$ les angles qui sont de part et d'autre de la résultante $V$, on aura, d'après les premiers principes de la mécanique,

$$X = S\,\frac{\sin. x}{\sin. y}.$$

Pour déterminer $S$, $x$, et $y$, faisons

| | |
|---|---|
| L'angle $FCH$ = . . . . . . . . | $a$ |
| Celui $IHK$ = . . . . . . . . | $b$ |
| Celui $EAC$ = . . . . . . . . | $c$ |
| Celui $CAB$ = . . . . . . . . | $d$ |
| Celui $BDa$ (du frottement) = . . . | $e$ |
| $CE$ (perpendiculaire sur $AS$) = . . | $f$ |

on se rappellera de plus que

| | |
|---|---|
| $CG$ = . . . . . . . . . . | $R$ |
| $CF$ = . . . . . . . . . . | $\frac{2r}{\pi}$ |
| $CD$ = . . . . . . . . . . | $r'$ |

et par conséquent

| | |
|---|---|
| $CB$ (perpendiculaire sur $AV$) = . | $r'$ coss. $e$ |



D'après ces données, on trouvera facilement

$$L = \sqrt{N^2 + 4T^2}$$

$$\text{tang. } a = \frac{2T}{N}$$

$$S = \sqrt{L^2 + 2LP' \sin. a + P'^2}$$

$$\sin. b = \frac{P'}{S} \text{ coss. } a$$

$$f = \frac{P'}{S} \cdot \frac{2r}{\pi}$$

$$\text{tang. } c = \frac{f \sin.(a+b)}{R + f \text{ coss.}(a+b)}$$

$$\sin. d = \frac{\sin. c\, r' \text{ coss. } e}{f}$$

$$x = c + d$$

$$y = a + b - x = a + b - (c + d).$$

$f$ a été déterminé d'après le principe que le moment de la résultante est égal à la somme des momens des composantes.

35. Si on appelle $F''$ la partie de la force motrice ($F$) destinée à vaincre les frottemens, il est clair qu'on aura $F'' = X - F'$, c'est-à-dire, que $F' + F'' = S\frac{\sin. x}{\sin. y} = S\frac{\sin.(c+d)}{\sin.\{(a+b)-(c+d)\}}$.

Quoique la méthode que nous venons de donner dans ce numéro, ne soit peut-être pas entièrement rigoureuse à cause de la réduction de $Q'$ à $\frac{1}{2}Q'$ ou $P'$, il n'en peut cependant résulter aucune erreur sensible.

Détermination de la force relative à l'inertie.

Les forces $F'$ et $F''$, étant adaptées à la circonférence de la roue, font équilibre à la charge, ainsi qu'aux résistances provenant du frottement, et la machine est sur le point de tourner; il ne reste plus qu'à faire passer dans les masses à mouvoir une certaine quantité de mouvement, ou, pour me servir de l'expression ordinaire, à vaincre leur inertie, et à leur communiquer une certaine vitesse au bout d'un certain tems : appelons $F'''$ la force qui produira cet effet, et déterminons sa valeur.

36. Supposons, pour plus de simplicité, que la masse de la roue, celle de l'attirail, et celle de l'eau à élever, soient immédiatement adaptées à la circonférence de la roue; appelons

$M'$, la masse de la roue.
$E'$, celle de l'équipage ou attirail.
$G'$, celle de l'eau.

Supposons encore que la roue soit depuis quelque tems en mouvement, et qu'elle ait une vitesse $v$: comme elle porte la masse $E'+G'$, à l'aide d'une manivelle; à chaque tour, elle retrouve cette masse en repos, elle la choque, elle accélère uniformément son mouvement, de manière qu'au bout du demi-tour, elle lui a communiqué la vitesse $v$ : elle continue à se mouvoir, avec ce même degré de célérité, pendant l'autre demi-tour, à la fin duquel elle rechoque la masse $E'+G'$; et se retrouve dans les mêmes circonstances qu'au tour précédent.

Cela posé, la force accélératrice $F'''$ agissant sur les masses $M'$, $E'$, $G'$, son expression, celle de la pesanteur étant 1, sera $\frac{F'''}{M'+E'+G'}$, et la vitesse qu'elle communiquera, en une seconde, à un corps soumis à son action, sera $\frac{g\,F'''}{M'+E'+G'}$, $g$ étant celle que la pesanteur communique dans le même tems.

A chaque tour, la roue $M'$, animée de la vitesse $v$, choque la masse $E'+G'$; soit $v'$ la vitesse qu'elle lui communique, et qui est commune à toutes les masses, dans l'instant qui suit immédiatement le choc : on aura, d'après la loi des communications du mouvement,

$$M'\,v = (M'+E'+G')\,v'.$$

Mais la force accélératrice agissant sur la masse à mouvoir, pendant tout le tems $t'$ de la demi-révolution de la roue, lui communique au bout de ce tems une vitesse qui sera représentée par $\frac{t'\,g\,F'''}{M'+E'+G'}$; ainsi, la vitesse totale au bout du tems $t'$, sera $v'$ plus cette quantité : mais comme cette vitesse, d'après ce que nous avons déjà dit, doit être égale à $v$, on aura

$$v = v' + \frac{g\,t'\,F'''}{M'+E'+G'}.$$

Si, de suite après le choc, la force accélératrice n'eût pas agi sur le mobile, l'espace qu'il aurait parcouru uniformément en vertu de la vitesse $v'$, au bout du tems $t'$, eût été $v't'$. Celui qu'il parcourt, en vertu de la force accélératrice, sera $\frac{g\,t'^2\,F'''}{2(M'+E'+G')}$ : or la somme de ces deux espaces, ou l'espace réellement parcouru pendant le tems $t'$ par le mobile, étant la demi-circonférence de la roue, ou $\pi R$, on aura

$$\pi R = v'\,t' + \frac{g\,t'^2\,F'''}{2(M'+E'+G')}.$$

De ces trois équations, on tire

$$F''' = \frac{2\pi R\,(M'+E'+G')(E'+G')}{g\,t'^2\,(2M'+E'+G')}.$$

Appelant $t$ le tems que la roue emploie à faire un tour, c'est-à-dire, faisant $2t' = t$, et observant que $vt = 2\pi R$, on aura

$$F''' = \frac{2.v^2 (M' + E' + G')(E' + G')}{g.\pi.R(2M' + E' + G')}.$$

Equation qui fait voir que, le mobile restant le même, la force est proportionnelle au carré de la vitesse, ainsi que l'apprend la théorie des forces accélératrices.

Si on voulait rapporter les masses à mouvoir, à l'extrémité du bras $r$ de la manivelle, au lieu de les rapporter à la circonférence, et que $M$, $E$, $G$, exprimassent ces nouvelles masses, on aurait

$$Mr^2 = M' R^2$$
$$Er^2 = E' R^2$$
$$Gr^2 = G' R^2$$

Puisque, d'après la théorie ordinaire du mouvement de rotation (1), les momens des quantités de mouvement doivent être égaux pour produire le même effet, et par conséquent pour pouvoir être substitués l'un à la place de l'autre; en mettant dans la valeur de $F'''$, celles de $M'$, $E'$, $G'$, tirées des équations précédentes, nous aurons, toute réduction faite,

$$F''' = \frac{2(M + E + G)\ (E + G)r^2 v^2}{\pi.R^3 g(2M + E + G)}.$$

37. Telle est la formule qui donnerait la valeur de $F'''$, si $E$ et $G$ étaient mues circulairement autour du centre de rotation, en ayant toujours la même vitesse; mais il n'en est pas réellement ainsi : ces masses sont bien, il est vrai, mues par la manivelle, mais elles n'ont qu'un mouvement

(1) Francœur, *Traité élémentaire de Mécanique*, §. 243.



horizontal de *va et vient :* de sorte que le moment de leur quantité de mouvement varie à chaque instant : il n'est $Er^2$ et $Gr^2$ que lorsque le bras de la manivelle est vertical; c'est-à-dire au milieu de la *levée :* il est o au commencement et à la fin. Voyons la correction que nécessite cette variation dans la valeur de $Er^2$ et celle de $Gr^2$.

En un point quelconque du mouvement, éloigné de $\beta^\circ$. de la verticale, le moment de la quantité de mouvement de $E$ sera représenté par $E(r\sin.\beta)^2$ : ainsi, il faut chercher la valeur moyenne de toutes les valeurs de $(r\sin.\beta)^2$, dans toute l'étendue de la demi-circonférence décrite. Cette moyenne sera $\frac{\int(r^2 \sin.\beta)^2}{2r}$ ; or $\int\pi.(r\sin.\beta)^2$, c'est-à-dire, la somme de tous les cercles qui ont $r$ sin. $\beta$ pour rayon, est égale à la solidité d'une sphère dont $r$ serait le rayon, et par conséquent à $\frac{4\pi r^3}{3}$; ainsi, la moyenne cherchée sera $\frac{2r^2}{3}$ : et le moment moyen sera $\frac{2Er^2}{3} = \frac{2E}{3}.r^2$. Mettant ainsi $\frac{2}{3}E$ à la place de $E$, et $\frac{2}{3}G$ à la place de $G$, nous aurons pour valeur finale

$$F''' = \frac{4(1{,}5M + E + G)(E + G)r^2 v^2}{3\pi R^3 g(3M + E + G)}.$$

On verra, dans l'application que nous allons faire, la manière de déterminer $M$, $E$ et $G$.

38. Si la charge $P$ était continuellement portée par la roue, $F'''$ serait la force qui faudrait employer pour vaincre l'inertie de la machine et de $P$: mais comme cette quantité n'est portée par la roue que durant la moitié du tems de son mouvement, la résistance $F'''$ provenant de l'inertie est évidemment moindre que celle que nous avons indiquée. Il m'a paru que la manière la plus exacte, ou du moins la plus approchée, d'avoir sa valeur, était de déterminer

d'abord la résistance provenant de l'inertie de la machine ; abstraction faite de la charge ; et pour cela, il suffit de prendre la valeur de $F'''$ en faisant $G = 0$. On retranchera ensuite cette seconde valeur de $F'''$ de la première, et le reste sera la résistance due à l'inertie de $P$ ; on en prendra la moitié, que l'on ajoutera à la résistance produite par l'inertie de la machine. Ces diverses opérations transforment la valeur de $F'''$, ainsi qu'il suit :

$$F''' = \frac{2r^2v^2}{3\pi R^3 g}\left\{\frac{(1,5M+E+G)(E+G)}{3M+E+G}+\frac{(1,5M+E)E}{3M+E}\right\}.$$

39. Réunissant les trois forces partielles $F'$, $F''$, $F'''$, et appelant $F$ leur somme, c'est-à-dire, la force nécessaire pour mouvoir la charge $P$, en ayant une vitesse $v$, on aura

$$F = S\,\frac{\sin.\,(c+d)}{\sin.\,\{a+b-(c+d)\}}$$
$$+\frac{2r^2v^2}{3\pi R^3 g}\left\{\frac{(1,5M+E+G)(E+G)}{3M+E+G}+\frac{(1,5M+E)E}{3M+E}\right\}.$$

Passons à l'application de cette formule à nos expériences.

*Application aux expériences.*

Dimensions de la machine.

40. Nous avons déjà donné (N°. 9) une idée de la machine sur laquelle nous avons fait nos expériences ; exposons maintenant, d'une manière plus exacte, les dimensions des parties qui entrent dans nos calculs.

*Dimensions de la roue.*

| | |
|---|---|
| Rayon (jusqu'au bord extérieur des augets). | 5,685 mèt. |
| Rayon (jusqu'au point où est la puissance). | 5,468 |
| Rayon (jusqu'au fond des augets). | 5,360 |
| Rayon (jusqu'au fonçage). | 5,309 |
| Largeur extérieure de la roue. | 1,245 |
| Largeur intérieure des augets. | 1,082 |



| | |
|---|---|
| Profondeur intérieure des augets. | 0,3248 mèt. |
| Distance extérieure d'un auget à l'autre. | 0,3883 |
| Épaisseur de chaque couronne. | 0,0812 |
| Longueur des bras de la roue. | 11,370 |
| Leur équarrissage. | 0,1624 |
| Longueur de l'arbre. | 3,4108 |
| Son équarrissage moyen. | 0,8023 |
| Rayon ou bras de la manivelle. | 0,7320 |
| Rayon du gros tourillon. | 0,1218 |
| Rayon du tourillon de l'extrémité. | 0,0677 |
| Poids des ferrures des augets. | 24,2 myriagr. |
| ——— du fonçage. | 4,9 |
| ——— des bras. | 20,5 |
| ——— de l'arbre. | 214,4 |

*Dimensions de l'attirail.*

| | |
|---|---|
| Longueur de la bielle (1). | 9,907 mèt. |
| Son équarrissage moyen. | 0,230 |
| Longueur des tirans horizontaux. | 27,502 |
| Leur équarrissage moyen. | 0,1875 |
| Longueur des *schwingues*. | 1,949 |
| Équarrissage moyen de la première. | 0,311 |
| Rayon du boulon inférieur. | 0,034 |
| Rayon du boulon supérieur. | 0,041 |
| Équarrissage moyen des 3 autres *schwingues*. | 0,272 |
| Rayon de leur boulon inférieur. | 0,027 |
| Rayon de leur boulon supérieur. | 0,017 |
| Bras du varlet. | 1,949 |
| Son équarrissage moyen. | 0,365 |
| Rayon du boulon. | 0,0541 |
| Longueur des tirans verticaux. | 98,0 |
| Leur équarrissage. | 0,1354 |
| Poids des ferrures de la bielle. | 14,2 myriagr. |
| ——— des tirans horizontaux. | 37,2 |
| ——— de la pre. *schwingue*. | 6,0 |
| ——— des autres *schwingues*. | 1,6 |
| ——— du varlet. | 25,0 |
| ——— des tirans verticaux. | 77,3 |
| Poids d'un piston. | 3,85 |

(1) On nomme ainsi la première pièce d'un tirant horizontal, celle qui tient à la manivelle.

Nous avons donné dans la première partie de ce Mémoire (n°. 9) les dimensions des pompes.

Nous prendrons, dans nos calculs, le mètre cube d'eau à 100 myr.; et la pesanteur spécifique du bois de

| | |
|---|---|
| Chêne imbibé d'eau = . . . . . . . . | 1,029 |
| Chêne à l'état ordinaire. . . . . . . . | 0,800 |
| Sapin imbibé d'eau. . . . . . . . . | 0,894 |

Pour donner un exemple de la manière dont nous avons appliqué les formules ci-dessus, nous prendrons l'expérience n°. 7 du 5 septembre, dans laquelle la charge consistait en quatre pistons et dans l'eau élevée par les pompes n$^{os}$. 5, 6 et 7.

Poids à élever.

41. En déterminant les résistances provenant des colonnes d'eau mises en mouvement par les trois pompes, d'après ce que nous avons dit dans la première partie de ce Mémoire (n°. 23) on trouve qu'elles équivalent à un poids de 257 myr.; ajoutant 16 myr. pour le poids de quatre pistons, on a 273 myr. pour charge totale ou valeur de $P$.

Frottement.

42. Tous les frottemens que nous avons à calculer s'exercent sur des axes de fer ou de fonte, frottant contre des chappes de même matière; les surfaces frottantes sont enduites de vieux-oing, et le frottement les a rendues très-lisses. D'après cela, nous avons pris 0,125 pour le *rapport du frottement à la pression.* M. Coulomb, dans ses expériences sur le frottement des corps les uns contre les autres, a trouvé que ce rapport était de 0,118 à 0,121 pour



pour des axes de fer frottant contre des chappes de cuivre (1): et comme il est un peu plus fort, lorsque les surfaces frottantes sont de même nature, nous avons un peu augmenté celui indiqué par ce célèbre physicien. Ainsi, la valeur de $n$ employée dans nos calculs est de 0,125; et l'angle du frottement $e$, qui a pour tangente $\frac{1}{0{,}125}$ (ou 8), sera de 82°. 52 $\frac{1}{2}$'.

43. Déterminons d'abord $p$, ou la force nécessaire pour vaincre le frottement provenant uniquement du poids de la roue et de l'attirail. Nous avons vu qu'il était produit par la pression que le poids de la roue $N$ et celui des deux tirans verticaux $2\,T$; et il se déterminera par les formules du n°. 34, dans lesquelles on fera $P'$ égal à 0, ce qui les réduira à

$$p = \frac{\sin.\, d}{\sin.\,(a-d)} \sqrt{N^2 + 4\,T^2}$$

$$\text{tang. } a = \frac{2\,T}{N}$$

$$\sin.\, d = \frac{r' \text{ coss. } e.\ \sin.\, a}{R}.$$

Le poids $N$ de la roue, d'après ce que nous dirons plus bas dans la détermination de $M$ (relatif au moment d'inertie), = 1372,4 myr.: le poids $T$ d'un tirant vertical, avec ses ferrures, = 244,8 myr.: d'après cela et les valeurs de $r'$ et $e$ déjà données, on trouvera

$a =$ 19°. 45' 45".
$d =$ 0....3' 13.
$p =$ 4,01 myr.

(1) Voyez le beau Mémoire de ce savant, sur le frottement dans les machines. *Savans étrangers*, tom. X.

Passons actuellement au frottement produit sur le varlet et sur les *schwingues*, par la charge de 273 myr.

44. Observons que, quoique les deux bras du varlet soient égaux, et aient 1,949 mèt. de longueur, celui qui porte le tirant vertical, étant garni d'une chaîne anglaise qui se plie sur un secteur, et à laquelle le tirant est suspendu, doit être augmenté de la demi-épaisseur de cette chaîne ; d'après cela, on a $m = 1{,}949$ mèt. et $n = 1{,}983$. L'arc $\alpha$, que décrit le bras ($m$) du varlet dans sa demi-oscillation, a évidemment pour sinus la longueur du bras $r$ de la manivelle de la roue, $m$ étant le rayon du cercle ; ce qui donne, d'après les valeurs ci-dessus,

$\alpha = 22°. 4'$

en substituant les valeurs numériques de $r''$ ($= 0{,}0541$), $e$, $\alpha$, $m$, $n$ et $P$ dans les expressions de $a$, $d$, et $Q$, on obtient

$$a = 45°. 30'.$$
$$d = 0°. \ 8'\ 31''.$$
$$Q = 279{,}1 \text{ myr.}$$

45. Nous n'avons aucune observation à faire sur la détermination de $q$, ou force nécessaire pour vaincre le frottement, produit par la pression de $Q$ sur le tourillon inférieur de la *schwingue* la plus voisine du varlet. La simple substitution des valeurs numériques ($r'''$ étant de 0,0271 mèt.), donne

$q = 0{,}097$ myr.

Le boulon supérieur se trouvant plus petit dans le rapport de 17 à 27, on a

$s = 0{,}061$.



Comme nous ne calculons les forces que jusqu'aux dixièmes de myr., nous pouvons, sans aucune erreur, prendre des valeurs égales pour les deux schwingues suivantes, et porter à 0,5 myr. la force relative au frottement des trois schwingues : la quatrième ayant des dimensions plus fortes exigera 0,2 myr. pour ses deux boulons. Ainsi, l'effort nécessaire pour détruire le frottement sur les huit boulons des quatre *schwingues* ne sera que de 0,7 myr. agissant à l'extrémité du bras de la manivelle de la roue.

46. Il faut observer que l'action de la manivelle n'étant pas dans la direction du tirant horizontal, sur lequel agit $Q$ augmenté de $q$, $q'$ etc., $s$, $s'$ ($279{,}1 + 0{,}7$) ; il en résulte une perte de force ; de sorte que pour faire équilibre à $Q$ (279,8), la manivelle doit exercer une action un peu plus forte. Sa direction fait avec celle du tirant, un angle dont le sinus est le rayon (*statique*) $\frac{2r}{\pi}$ ; le *sinus totus* étant représenté par la longueur de la bielle comptée depuis la manivelle (cette longueur est de 9,204 mèt.) ; l'angle d'obliquité sera donc de 2°. 54' : ce qui exigera une augmentation de force = 0,4 myr. Ainsi, la pression que le tirant exerce contre la manivelle, pendant le mouvement, est de 280,2 myr.

47. Cette pression produit contre le tourillon, à l'aide duquel le tirant est adapté à la manivelle, un frottement qui équivaut à une force de 5,1 myr.

48. D'après tout cela, nous pouvons conclure que la manivelle porte une charge égale à un poids de 285,3 myr. : c'est ce poids que nous avons

représenté par $Q''$ (n°. 33) : ainsi, $\frac{1}{2}Q''$ ou $P' =$ 142,7 myr.

49. Passons maintenant au frottement sur les tourillons de la roue, que nous allons déterminer d'après les formules du n°. 34.

Le poids ($N$) de la roue étant de 1362,4 myr. et celui $2T$ des deux tirans verticaux, étant 489,5 ; la résultante $L$ sera 1447,7 myr., et l'angle $a$ que sa direction fait avec la verticale sera, ainsi que nous l'avons déjà dit, n°. 43, 19°. 45′ 45″. D'après cela, la résultante $S$ de toutes les résistances équivaudra à 1502 myr. En mettant ces valeurs numériques dans les autres formules, on trouve

$b = 5°.\ 7'\ 50''.$
$c = 0...11\ 38.$
$d = 0....3\ 58.$

Ce qui donne, pour valeur de $F'+F''$, c'est-à-dire, de la force qui appliquée à la périphérie, doit vaincre la résistance provenant de la charge et du frottement, 16,352 myr.

Méthode abrégée pour la détermination du frottement.

50. La charge (pour un tour entier de la roue) étant 136,5 ($\frac{273}{2}$) myriagr., ou de 11,63 myr. en la supposant à à l'extrémité du rayon $R$; la résistance ou frottement provenant du poids de la machine seule étant (n°. 43) 4,01 ; nous voyons que la force, nécessaire pour vaincre le frottement (1) provenant de la charge $\frac{1}{2}P$, équivaut à un poids de $16{,}35 - (11{,}63 + 4{,}01)$ myr. ou 0,71 myr. Or, ce poids étant proportionnel à $P$ ou à $\frac{Pr}{\pi R}$ ($= F'$. Voy. n°. 30) qui est l'expression analytique de 11,63 myr., nous pouvons le

(1) On comprend ici, avec la force équivalente à ce frottement, celle qui provient de la différence de longueur du bras du varlet (n°. 44), et celle due à l'obliquité de la *traction* de la manivelle (n°. 46), elles sont toutes proportionnelles à $P$.



représenter par $\varphi\frac{Pr}{R\pi}$, $\varphi$ étant un coefficient constant, qui sera ici $\frac{71}{1163}$ ou 0,061. D'après cela, en se rappelant que 4,01 myr. est la quantité que nous avons désignée par $p$ (n°. 43), nous aurons

$$F'' = p + \varphi\frac{Pr}{\pi R} = p + \varphi F'.$$

Cette valeur de $F''$ n'est pas rigoureusement exacte ; car, en général, les deux termes qui la composent, savoir le frottement provenant du poids de la machine, et celui provenant du poids de la charge, ne doivent pas s'ajouter ; mais bien se combiner d'après les lois de la composition des forces : cependant la manière dont nous avons déterminé $\varphi$ compense en grande partie l'erreur qui en résulte. Ainsi, sans craindre aucune erreur, qui puisse tirer à conséquence, nous avons fait

$$F' + F'' = p + \frac{Pr}{\pi . R}(1 + \varphi).$$

C'est d'après cette méthode très-simple, que j'ai déterminé $F'+F''$ dans la plupart de nos expériences. Le calcul, par la méthode indiquée précédemment (N^os. 31-35), et dont nous avons fait une application, exige, pour chaque expérience, plus de cent logarithmes. Je l'ai fait pour quelques-unes, et je me proposais de le faire pour toutes ; mais ayant été obligé de terminer ce Mémoire plus promptement que je n'aurais désiré, il m'a fallu avoir recours à un moyen abrégé ; et j'ai fait usage de celui que je viens d'exposer. L'erreur qui peut en résulter sera entièrement insignifiante ; rarement sera-t-elle d'un centième dans les résultats donnés par la colonne 111 du tableau général. J'ai pris le terme $1+\varphi = 1{,}06$, et plus souvent 1,07.

Inertie.

Commençons la détermination de la force relative à l'inertie par celle de $M$, de $E$, et de $G$ qui entrent dans l'expression de cette force.

51. *Moment d'inertie de la roue.* $M$ est la masse de la roue en mouvement rapportée à l'extrémité du bras de la manivelle ; c'est-à-dire, son moment d'inertie par rapport à ce point :

ainsi, sa valeur sera le moment d'inertie par rapport à un point placé à l'unité de distance du centre, et divisé par le carré $r^2$ du bras de la manivelle.

Le moment d'inertie de la roue, est la somme des momens d'inertie de ses parties. Nous allons déterminer celui de la *couronne*, celui du *fonçage*, celui de bras et celui de l'arbre.

Les couronnes d'une roue hydraulique, sont les deux limbes qui forment les parois latérales des augets : leur largeur est égale à la profondeur de ces augets. Mais nous comprenons ici, sous le nom de *couronne*, toute la partie de la roue qui est au-delà du rayon qui va depuis le centre jusqu'au *fond* des augets ; et, sous cette désignation, sont comprises les deux vrais couronnes, et les planches transversales des augets. Le tout forme un limbe (ou cylindre excavé) de 0,244 m. d'épaisseur, 0,325 de largeur ; 5,685, de rayon extérieur, et par conséquent 5,360 de rayon intérieur. D'après cela, son volume sera de 2,753 m. cubes. En multipliant par 102,9 myr., pesanteur du mètre cube de bois de chêne imbibé d'eau (1), et ajoutant 24,2 myr. de ferrures, nous aurons 307,5 myr. pour sa masse. Son moment d'inertie (2) sera donc 307,5 × $\frac{1}{2}(\varrho^{1}-\varrho^{2})$, $\varrho$ étant le rayon extérieur et $\varrho'$ le rayon intérieur : ce qui, d'après les valeurs ci-dessus, se réduit à 9386,4 myr.

(1) Les planches des augets sont, il est vrai, en sapin, mais nous avons diminué leur volume dans le même rapport que nous augmentions leur pesanteur spécifique.

(2) La détermination des momens d'inertie se trouvant exposée dans tous les traités de mécanique, il est superflu de rien dire ici à ce sujet.



Par *fonçage* de la roue, nous entendons l'ensemble des planches qui forment le fond des augets : il présente ici un cylindre excavé dont l'épaisseur ou hauteur serait la largeur de la roue (1,245 m.) ; dont le rayon extérieur serait 5,360 et l'intérieur 5,309 ; d'après cela, et en se rappelant que le poids de ses ferrures s'élève à 4,9 myr., on trouve son moment d'inertie = 6368,7.

Les bras sont au nombre de 16 ; huit grands, et huit petits : nous allons procéder comme s'il n'y en avait que 12, mais tous grands et des dimensions indiquées (n°. 40.). En les regardant comme des parallélipipèdes rectangles, qui tournent autour d'un axe transversal passant par le milieu de leur longueur et de leur largeur, on trouve pour leur moment d'inertie, 4209,2 myr.

L'arbre de la roue peut être regardé comme un parallélipipède, tournant autour de son axe longitudinal ; ce qui, en ayant égard aux dimensions données plus haut, donne, pour son moment d inertie, 47,2 myr.

Ajoutant ces quatre quantités, nous aurons 20011,5 myr. pour le moment d'inertie de la roue, pris par rapport à un point éloigné de un mèt. du centre de rotation. D'après la théorie du mouvement de rotation, on le rapportera à tout autre point, en multipliant cette quantité, par le rapport du carré des distances au centre, c'est-à-dire, en la divisant par le carré de la distance du nouveau point, la distance du premier étant 1 : la longueur du bras de la manivelle est de 0,732 m. ; par conséquent le moment d'inertie par rapport à son extrémité, ou la valeur de $M$, sera 37347,5 myr.

52. Le terme $E$ représente la masse de l'attirail rapportée à l'extrémité de la manivelle, ainsi que nous l'avons dit (page 204); mais comme cette masse n'a pas réellement la vitesse du point extrême de la manivelle $r$, qu'elle ne parcourt que le diamètre du cercle décrit par ce point, tandis que celui-ci parcourt la demi-circonférence; elle doit être diminuée dans le rapport du carré des vitesses (les forces accélératrices étant comme les carrés des vitesses), c'est-à-dire, qu'il faut la multiplier par $(\frac{2}{\pi})^2$; $\pi : 2$ étant le rapport des vitesses.

La masse de la bielle, des tirans horizontaux et des tirans verticaux, se trouvera en multipliant leur volume par leur pesanteur spécifique, et en ajoutant le poids des ferrures. Quant à celle des *schwingues*, et du varlet, comme elles ont un mouvement d'oscillation, on les déterminera d'après les règles des momens d'inertie, et on les rapportera à la vitesse du tirant, c'est-à-dire, à leur extrémité supérieure. Soit $\lambda$ la longueur d'une schwingue, $c$ le côté du carré de sa base, $f$ les ferrures dont elle est chargée; son moment d'inertie sera

$$\frac{(\lambda c^2 + f)(\lambda^2 + \frac{1}{2} c^2)}{2 \lambda^2}.$$

Le varlet sera regardé comme composé de deux schwingues. Ajoutant toutes ces masses et les multipliant par $(\frac{2}{\pi})^2$, nous aurons 375,3 myr. pour valeur de $E$.



52. $G$ exprime la masse d'eau élevée par les pompes, et rapportée, d'après la théorie du mouvement de rotation, à la vitesse de l'extrémité du bras de la manivelle. Nous allons d'abord prendre cette masse par rapport à la vitesse des tirans ou des pistons; et nous la réduirons ensuite à la vitesse de la manivelle, en multipliant, comme dans le n°. précédent, par $(\frac{2}{\pi})^2$:

Pour avoir ici la masse d'eau élevée par une pompe, il faut distinguer celle contenue dans le tuyau d'aspiration, et celle qui l'est dans le corps de pompe. Celle-ci, ayant la vitesse du piston, sa valeur sera $\frac{\pi D^2 l}{4}$, $D$ étant le diamètre du corps de pompe, et $l$ sa longueur. La masse de l'eau portée par le tuyau d'aspiration sera bien $\frac{\pi d^2 l'}{4}$, $d$ étant le diamètre du tuyau et $l'$ sa longueur : mais comme cette masse est mue ici avec une vitesse qui est à celle du piston comme $D^2 : d^2$, il faudra la multiplier par le carré de ce rapport (les forces accélératrices étant comme les carrés des vitesses) et elle deviendra $\frac{\pi D^4 l'}{d^2}$. Ajoutant ces deux expressions, et multipliant par $(\frac{2}{\pi})^2$, nous aurons pour la valeur de $G$, dans une pompe,

$$\frac{D^2}{\pi}\left(l + l' \frac{D^2}{d^2}\right).$$

$k$ étant le poids d'un piston, $\frac{4k}{\pi^2}$ sera la masse rapportée à l'extrémité de la manivelle.

Substituant les valeurs numériques de $D$, $d$

$l$, $l'$, $k$ pour les trois pompes et les quatre pistons de l'expérience n°. 7, on aura $G=428,2$ myr.

53. Reprenons actuellement la valeur de $F'''$ donnée dans le n°. 38; mettons à la place de $M$, $E$, $G$, les quantités numériques qu'elles représentent, et que nous venons de déterminer, nous trouverons (en observant que $g=9,8088$ m. et que, dans l'expérience n°. 7, dont il est ici question, $v=2,564$ m.) $F'''=0,276$ myr. Ce poids est celui qui, agissant à la circonférence de la roue et perpendiculairement au rayon, suffira pour donner à cette circonférence la vitesse $v$, lorsque la charge sera $P$ ou 273 myr. (équilibrée par $F'+F'$).

Si cette charge était continuellement portée par la machine, et que l'on eût en conséquence déterminé $F'''$ par la formule du n°. 37, on l'aurait trouvé égal à 0,377 myr.

Cette même formule, en faisant $G=0$, donne pour la force nécessaire pour vaincre l'inertie de la machine seule (sans aucune charge), l'expression générale $0,027\,v^2$. Dans l'exemple que nous avons choisi, $v$ étant 2,564, on a pour l'inertie de la machine 0,175 myr. Cette quantité, augmentée de la moitié de son excès sur 0,377, devient 0,276, qui est la valeur de $F'''$ par la formule du n°. 38.

54. Rassemblant les différentes parties ($F'$, $F'$, $F'''$) de la force totale $F$, on a

$$F'+F'=S\,\frac{\sin.\,(c+d)}{\sin.\left\{a+b+(c-d)\right\}}=\ldots\quad 16,4^{\text{myr.}}$$

$$F'''=\ldots\ldots\ldots\quad \underline{0,3}$$

$$16,7$$



ou, en faisant usage des formules (n$^{os}$. 30, 38, 43, 50,) que j'ai le plus souvent employées,

$$\begin{array}{lr} F'=\ldots\ldots\ldots & 11,6 \\ F'=\begin{cases} P\ldots \\ \text{?}\,F'\ldots \end{cases} & \begin{array}{r} 4,0 \\ 0,8 \end{array} \\ F'''\ldots\ldots\ldots & \underline{0,3} \\ F=\ldots\ldots\ldots & 16,7 \end{array}$$

C'est d'après ces méthodes, que nous avons calculé, dans chacune de nos expériences, la valeur de $F$, qui équivaut à la somme de toutes les résistances que la force motrice doit vaincre, pour élever une charge quelconque $P$ attachée à un des tirans, en donnant à la roue la vitesse $v$. Ces valeurs de $F$ forment la colonne III du tableau général de nos expériences.

*De la quantité d'eau dépensée par une roue à augets pour vaincre une résistance donnée.*

Les roues dont nous parlons ici sont uniquement mues par le poids de l'eau. Le fluide, il est vrai, en tombant dans l'auget qui le reçoit, a déjà une certaine vitesse : mais comme dans toutes nos expériences, cette vitesse est plus petite que celle de la roue, il n'y a point de force produite par le choc. Détermination théorique.

55. Supposons une roue portant une charge, et contenant, dans ses augets, une quantité d'eau suffisante pour maintenir l'équilibre. Le moment de la charge ou résistance sera $FR$; $F$ étant, comme ci-dessus, un poids équivalent à la somme des résistances à vaincre, et agissant tangentiellement à l'extrémité du rayon $R$. Celui de la puissance, sera, d'après les lois

de la statique (1), $S.\Pi.R(2R-(a+b))$ : dans cette expression,

$a=$ différence de niveau entre l'extrémité supérieure du diamètre vertical ($2R$) et le point où l'eau atteint la roue :

$b=$ différence de niveau entre l'extrémité inférieure du même diamètre, et le point où l'eau abandonne les augets :

$S=$ surface de la coupe transversale de la bande d'eau portée par la roue, et supposée uniformément distribuée sur l'arc ou portion de surface cylindrique (partie du fonçage) ayant pour corde $2R-(a+b)$. $\Pi=$ poids d'un cube d'eau qui auroit l'unité de mesure pour côté.

Puisqu'il y a équilibre, les deux momens sont égaux, et l'on a,

$$F=S\Pi.(2R-(a+b)).$$

Mettons actuellement la roue en mouvement, et faisons parcourir à sa circonférence l'espace $v$ en une seconde : soit $Q$ la quantité d'eau qu'elle reçoit dans le même tems ; il est évident qu'on aura $Q=sv$. Ce qui donne

$$F=\frac{Q.\Pi}{v}(2R-(a+b)).$$

De plus, observons que lorsque la roue est en mouvement, l'eau qu'elle porte n'agit plus de tout son poids, ainsi que nous l'avons déjà dit (n°. 25) ; et l'effort qu'elle exerce n'est plus représenté par $S\Pi\{(2R-(a+b)\}$.

Lorsque la vitesse est nulle, le fluide doit agir de tout son poids; et il n'exerceroit aucune action, si la roue avoit la même vitesse que celle qu'il au-

(1) Bossut, *Traité d'hydrodynamique*, tom. 1, ch. 17.



roit lui-même en tombant librement depuis le canal qui le verse jusqu'au point où il abandonne les augets. On satisfera à ces deux conditions, en multiplant la valeur de $F$ déjà donnée par le facteur $(1-\frac{v}{V})$, ou par une de ces puissances ; $V$ étant la vitesse due à la hauteur de chute dont nous venons de parler. L'usage ordinaire (n°. 25) étant de prendre le carré de ce facteur, nous aurons pour expression de la force d'une roue à augets en mouvement

$$F=\frac{Q.\Pi}{v}\{2R-(a+b)\}\left(1-\frac{v}{V}\right)^2.$$

D'après la théorie de la chute des graves, et en appelant $h$, la différence de niveau entre le point d'où tombe l'eau et celui où elle atteint la roue, on aura $V=\sqrt{2g\{2R-(a+b)+h\}}$. Si on nomme $D'$ le diamètre $2R$ diminué de $a+b$, l'expression du rapport entre l'effet produit ($Fv$), et la quantité ($Q$) d'eau dépensée sera

$$Fv=Q.\Pi.D'\left(1-\frac{v}{\sqrt{2g(D'+h)}}\right)^2$$

d'où l'eau tire

$$Q=\frac{Fv}{\Pi D'\left(1-\frac{v}{\sqrt{g(D'+h)}}\right)^2}.$$

56. Appliquons cette formule à l'expérience n°. 7. Application aux expériences.

Nous rappellerons que dans cette expérience $F=16{,}7$ myr. et $v=2{,}564$ met. On a d'ailleurs $2R=10{,}936$ m. ; $a$ (sinus verse d'un arc de la roue de 10°.) $=0{,}083$ m. ; $h=0{,}2$ m. Quant à $b$, sinus verse de l'arc compris entre l'extrémité inférieure du diamètre vertical et le point où l'eau des augets abandonne la roue ; sa valeur varie suivant la quantité d'eau et suivant la vitesse. Nous allons entrer dans quelques détails sur cette valeur.

Nous aurons la position du point que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire, sa distance à l'extrémité inférieure du diamètre vertical, en prenant une moyenne entre la distance de cette même extrémité à un auget lorsqu'il commence et lorsqu'il finit de verser son eau. Toutes ces distances étant mesurées sur la circonférence.

Il est d'abord évident qu'un auget finit de verser, lorsque celle de ses parois, par-dessus le bord de laquelle l'eau s'enfuit, se trouve dans une position horizontale : et comme cette paroi ou planche, fait avec la tangente à la roue un angle de 31°. 35′, nous en conclurons que lorsque son bord extérieur sera à 31°. 35′ de l'extrémité inférieure du diamètre vertical, elle se trouvera horizontale.

Le moment où un auget commence à verser, est celui où la surface (horizontale) de l'eau qu'il renferme s'est élevée jusqu'au niveau du bord de la même planche dont nous venons de parler. Ainsi, la détermination de la distance de ce bord à l'extrémité du diamètre vertical, pour que le *versement* commence, se borne à donner cette distance, pour le cas où la partie de l'auget, qui se trouve au-dessous d'un plan horizontal tangentiel au bord, est égale en volume à la quantité d'eau tombée dans l'auget. Cette condition mise en équa-



tion, nous donnera pour la distance ou arc, $x$, cherché

$$\text{cot. } x = \frac{d'\,l}{2\left\{p\,d\,l-(c-q)\right\}}$$

ou, aussi exactement toutes les fois que l'on aura $4q > c$,

$$\text{cot. } x = \frac{2\,(c-q)}{p^2\,l},$$

formules, dans lesquelles

$c$ = capacité de l'auget.
$q$ = quantité d'eau tombée dans l'auget (1).
$Q'$ = dépense du courant en 1″.
$p$ = profondeur de l'auget.
$l$ = sa largeur.
$d$ = distance d'un auget à l'autre prise au fond.
$d'$ = *idem*, mais prise sur la circonférence extérieure de la roue.
$q = \frac{Q'\,d'}{v}$.

---

(1) La détermination de $q$ suppose que l'on connaisse la dépense du courant, ce qui est précisément l'objet cherché ; $q$ est par conséquent une fonction de l'inconnue : mais sa vraie valeur, mise dans l'expression de cette inconnue, $Q$, compliquerait beaucoup les calculs. Nous l'avons en conséquence déterminée, d'après la dépense, $Q'$, donnée par une de nos expériences ; dépense qui diffère très-peu de celle $Q$ donnée par la théorie, ainsi que nous le verrons par la suite. L'erreur qui peut résulter de ce mode de procéder est absolument insignifiante : les valeurs extrêmes de $b$ que nos expériences nous ont présentées, sont 1,08 et 1,27 mèt. : ce qui donne pour valeurs extrêmes de $D'$ 9,585 et 9,776 mèt. : la différence n'est pas de 0,02 ; et celle qui en résulte dans les valeurs de $Q$ est encore bien moindre.

Le volume de l'auget, dont $c$ exprime la capacité est limité, 1°. et 2°., par les deux couronnes de la roue ; 3°. par la planche du fond ; 4°. par une seconde planche placée sur un bord de la première, dans la direction du rayon de la roue, et qui va jusqu'au tiers de la profondeur de l'auget ; 5°. par une troisième, placée sur l'autre bord de la première, de mêmes dimensions que la seconde, mais que l'on imagine prolongée jusqu'au bord extérieur de la roue ; 6°. enfin, par une quatrième qui joint l'extrémité de ce prolongement, avec le bord de la seconde. Ce volume calculé exactement, d'après toutes les règles de la stéréométrie, donne $c = 0,06824$ m. cub. (Pour avoir la capacité entière d'un auget, c'est-à-dire, toute l'eau qu'il peut contenir, il faut ajouter un prisme triangulaire égal à 0,0277 m. cub.)

D'après la construction de la roue, on a $d' = 0,3882$ m. $d = 0,366$, $l = 1,082$, $p = 0,3248$, $Q' = 0,0633$ m. cub. ; ce qui donne $q = 0,009685$ mèt. cub., et $x = 44° \; 13'$.

Ainsi, la moyenne entre le commencement et la fin du versement sera de 37° 54° : le sinus verse ($b$) de cet arc, dans un cercle où le rayon est de 5,468 mèt. est 2,107 mèt.

D'après cela $D' = 9,746$ m. (1). La disposition de

(1) J'observerai que les valeurs extrêmes de $D'$ ne diffèrant pas de $\frac{1}{50}$. On peut, dans la pratique, regarder cette quantité comme constante ; la moyenne de ces valeurs (9,68 m.) sera les 0,89 du diamètre $2R$, ou les 0,85, à-peu-près les $\frac{6}{7}$, du *vrai* diamètre (11,37 m.) de la roue.



de la machine donne $h = 0,2$ (1) ; ainsi, $\sqrt{2g\,(D'+h)}$ ou $V = 13,97$ m. Mettant ces valeurs dans l'expression de $Q$, on aura

$$Q = 0,0659 \text{ mèt. cub.}$$

C'est d'une manière semblable que nous avons calculé, pour chacune de nos expériences, les quantités d'eau indiquées dans la colonne VII du tableau général (page 231).

Quantité d'eau donnée par l'expérience.

58. Le moyen le plus simple peut-être et le plus exact que nous eussions de connaître la dépense, en eau motrice, faite par la roue dans chacune de nos expériences, était de rassembler l'eau dans un réservoir, de l'y entretenir constamment au même niveau, et de l'en faire sortir par un pertuis dont les dimensions seraient déterminées, et dont la hauteur serait petite par rapport à celle du fluide dans le réservoir. A cet effet, M. Duchesne fit dresser et et réparer la vanne qui devait fermer et régler l'ouverture du pertuis : il laissa l'eau s'élever dans le large canal (presque horizontal) qui la conduit à la machine, jusqu'à une hauteur de 0,3 à 0,4 mèt. : de cette manière, elle y était entièrement stagnante, jusqu'à une distance de plus de cent pas. Ainsi, elle ne sortait de cette espèce de réservoir, lorsqu'on levait un peu la vanne, qu'en vertu de sa seule pression, ce

(2) De nouveaux renseignemens que M. Duchesne m'a envoyés donnent à $a$ une valeur un peu plus grande, et à $b$ une valeur un peu plus petite ; ainsi la somme $a + b$ reste la même. Quant à $h$, ils le portent à 0,5 m au lieu de 0,2 : ce qui au reste ne donne pas, dans l'expérience n°. 7 une différence de $\frac{1}{60}$ dans la valeur de $V$, et de $\frac{1}{200}$ dans celle de $Q$.

qui nous fournissait un moyen de déterminer sa vitesse au passage du pertuis ; et comme les dimensions de celui-ci nous étaient exactement connues, en multipliant la surface de l'ouverture par la vitesse, nous avions la quantité d'eau écoulée.

L'ouverture était un rectangle, ayant 1,299 m. de longueur ; la hauteur était variable, et nous la réglions à l'aide d'une vanne : nous l'avons fait varier à volonté depuis 0,014 jusqu'à 0,054 mèt.

Quant à la vitesse de l'eau, nous rappelerons que lorsqu'un fluide sort d'un réservoir par une ouverture placée au-dessous du niveau, sa vitesse est due à la hauteur comprise entre ce niveau et l'ouverture (1) : ainsi, la vitesse d'un filet quelconque du fluide sortant du pertuis sera $\sqrt{2gh'}$, $h'$ étant la distance verticale entre le niveau et le filet. En appelant $h$ la hauteur de l'eau derrière la vanne, c'est-à-dire, le plus grand de $h'$, et $o$ la largeur de l'ouverture du pertuis, ou la quantité dont on a levé la vanne, $h-\frac{1}{2}o$ sera la hauteur moyenne, et lorsque $o$ sera petit par rapport à $h$ (qu'il n'en sera que la 20e. et même la 15e. partie), on peut sans erreur sensible prendre $\sqrt{2g(h-\frac{1}{2}o)}$ pour vitesse moyenne : en la multipliant par la surface de l'ouverture, nous aurons $1,299 \times o \times \sqrt{2g(h-\frac{1}{2}o)}$, pour la quantité d'eau dépensée en 1''.

(1) Quoique pour les démonstrations théoriques de cette proposition, on soit obligé de supposer l'ouverture infiniment petite, cependant l'expérience a fait voir qu'elle est rigoureusement applicable aux cas qui nous occupent. *Bossut, Traité d'hydrodynamique*, tom. I, p. 288 *et passim*.



Cette quantité doit être diminuée de l'effet produit par la contraction de la veine. Lorsqu'un fluide sort par une paroi mince, le coefficient relatif à cette diminution est 0,62 (1). Mais il devient 0,82, si on adapte, à l'ouverture, un petit tuyau additionnel (2). La partie supérieure du pertuis me paraît devoir être comprise dans le premier cas ; mais la partie inférieure, où l'eau glisse, en quelque sorte, sur le madrier qui forme le seuil de l'ouverture, se rapporte au second : en prenant une moyenne, nous aurons 0,72 pour le coefficient relatif à la contraction de la veine. Ainsi, la quantité d'eau dépensée sera

$$0,72.\ 1,299.\ o\sqrt{2g}\sqrt{h-\tfrac{1}{2}o}$$

ou

$$4,142 \times o\sqrt{h-\tfrac{1}{2}o}.$$

Quoique le coefficient 0,72 ait été déterminé d'après les plus grandes vraissemblances, on ne peut se dissimuler que sa détermination n'est pas rigoureuse ; au reste, toutes les fois qu'il ne s'agira que de comparer les dépenses affectées de la contraction de la veine fluide, peu importe sa valeur.

Dans le cas où $o$ excédera 0,02 mèt., nous ferons usage de la formule suivante, dans laquelle la vitesse moyenne est rigoureusement exacte :

$$0,72.\ \tfrac{2}{3}.\ 1,299\sqrt{2g}\left\{h^{\frac{3}{2}}-(h-o)^{\frac{3}{2}}\right\} \text{ (3)}$$

qui se réduit à

$$2,762\left\{h^{\frac{3}{2}}-(h-o)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

(1) *Bossut*, tom. II, chap. II. *Prony, Archit. hydr.* §. 834.

(2) *Bossut*, chap. III. *Prony*, §. 840.

(3) Voyez *Prony*, §. 804.

C'est d'après ces formules que nous avons calculé les quantités d'eau indiquées dans la colonne VI du Tableau général de nos expériences.

Je donne les valeurs de $h$ et de $o$, qui ont servi à nos déterminations, afin que si quelqu'un désirait employer des formules différentes, il eût les données nécessaires.

*Expériences du 5 septembre.*

| N°. des exp. | Valeur de $h$ | Valeur de $o$ |
|---|---|---|
| | mètres. | mètres. |
| 1. . | 0,3406. . | 0,0135 |
| 2. . | 0,3406. . | 0,0203 |
| 3. . | 0,3553. . | 0,0135 |
| 4. . | 0,3553. . | 0,0203 |
| 5. . | 0,3681. . | 0,0135 |
| 6. . | 0,3586. . | 0,0203 |
| 7. . | 0,3316. . | 0,0271 |
| 8. . | 0,3384. . | 0,0181 |
| 9. . | 0,2955. . | 0,0406 |
| 10. . | — | — |
| 11. . | 0,2572. . | 0,0474 |
| 12. . | 0,2572. . | 0,0541 |

*Epériences du 19 novembre.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. . | 0,2933. . | 0,0090 |
| 2. . | 0,2910. . | 0,0113 |
| 3. . | 0,2887. . | 0,0135 |
| 4. . | 0,2865. . | 0,0158 |
| 5. . | 0,2842. . | 0,0181 |
| 6. . | 0,2797. . | 0,0203 |
| 7. . | 0,2621. . | 0,0271 |



### 3. *Comparaison entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie.*

59. Nous avons rendu compte, dans le cours de ce Mémoire des 12 expériences que nous avons faites, M. Duchesne et moi, le 5 septembre (1806). Il serait superflu de répéter ce qui a été déja dit à ce sujet : je dirai seulement un mot sur le calcul des vitesses. On a donné, n°. 12, le nombre de tours que la roue faisait en une minute (ou 60″) : nous en conclurons l'expression ordinaire de la vitesse, c'est-à-dire, l'espace parcouru en 1″, par l'extrémité du rayon $R$ ; en multipliant le nombre de tours indiqué, par la longueur ($2\pi R$) de la circonférence, et en divisant par 60″. Expériences.

Le 19 novembre, M. Duchesne entreprit une nouvelle suite d'expériences, dont on a parlé n°. 13. Il avait principalement pour objet d'estimer, à l'aide du dynamomètre, la charge de ses machines ; mais il profita de cette occaoccasion pour examiner le rapport qu'il y avait entre la quantité d'eau motrice dépensée et l'effet produit. Le moyen le plus simple de le connaître, et celui qui nécessitait le moins de réductions de calcul, était de faire continuellement porter à la machine la même charge, et de faire varier la quantité d'eau motrice ; le rapport entre cette eau et la vitesse produite, était le rapport cherché.

Afin d'être bien sûr que la machine portait toujours le même poids, on résolut de la faire aller, sans accrocher aucune pompe aux tirans, et lui faire porter 7 pistons, dont le poids était de 30 myr. On augmenta graduellement l'eau motrice ; et dans 7 expériences, on eut tous les degrés de vitesse intermédiaires entre 2 et 4,5 mètres; termes extrêmes que l'on n'atteint jamais dans la pratique.

La charge de 30 myr., ou plutôt de 32 en l'augmentant d'un quatorzième à cause du frottement, réduite à l'extrémité du rayon $R$, en multipliant par $\frac{2r}{\pi R}$ (n°. 30), est de 2,72 myr.; et comme ce poids n'agit que pendant un demi-tour de la roue, nous en prendrons la moitié; qui, ajoutée à 4,01 myr. provenant des frottemens de la machine, donne 5,4 myr. Ainsi, dans les 7 expériences, la charge était équivalente à un poids de 5,4 myr. adapté à l'extrémité $R$ du même rayon, et par conséquent au même point que celui où la puissance était appliquée. Il faut augmenter cette charge d'un autre poids équivalent à la résistance provenant de l'inertie de l'attirail et des 7 pistons : ce poids varie dans chacune des expériences, et à l'aide de la formule donnée au n°. 38, on trouve qu'il est exprimé par $0{,}0377v^2$ myriagr. C'est d'après cette méthode que nous avons calculé les résistances des sept expériences du 19 novembre, données dans la colonne III du Tableau suivant :



## TABLEAU GÉNÉRAL

*Des expériences faites à* Poullaouen, *sur la quantité d'eau dépensée par une roue hydraulique.*

*Expériences du 5 septembre.*

| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. | VIII. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N°. des exp. | Poids élevé. $\frac{1}{2}P$ | Résist. vaincue. $F$ | Vitesse. $v$ | Effet prod. $Fv$ | Eau dépensée: D'après l'exp. | D'ap. la form. $A$ | D'ap. la form. $B$. |
| | myr. | myr. | mèt. | myr. | mèt. cub. | mèt. cub. | mèt. cub. |
| 1. . | 0. . | 4,3. | 3,44. | 14,6. | 0,0324. | 0,0272. | 0,0259 |
| 2. . | 0. . | 4,6. | 4,58. | 21,1. | 0,0483. | 0,0487. | 0,0485 |
| 3. . | 0. . | 5,0. | 3,44. | 17,2. | 0,0331. | 0,0309. | 0,0300 |
| 4. . | 0. . | 5,3. | 4,58. | 24,3. | 0,0494. | 0,0550. | 0,0546 |
| 5. . | 4,36. | 9,0. | 2,45. | 22,1. | 0,0337. | 0,0334. | 0,0316 |
| 6. . | 7,9. | 12,7. | 2,60. | 33,0. | 0,0496. | 0,0513. | 0,0486 |
| 7. . | 11,6. | 16,7. | 2,56. | 42,8. | 0,0633. | 0,0659. | 0,0624 |
| 8. . | 11,6. | 16,5. | 2,05. | 33,8. | 0,0430. | 0,0475. | 0,0440 |
| 9. . | 25,4. | 31,5. | 2,18. | 68,7. | 0,0882. | 0,1007. | 0,0946 |
| 11. . | 23,3. | 29,3. | 2,29. | 67,1. | 0,0948. | 0,1003. | 0,0944 |
| 12. . | 23,3. | 29,4. | 2,50. | 73,5. | 0,1075. | 0,1142. | 0,1079 |

*Expérience du 19 novembre.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. . | 1,3. | 5,5. | 1,99. | 10,9. | 0,0201. | 0,0152. | 0,0142 |
| 2. . | 1,3. | 5,6. | 2,29. | 12,8. | 0,0250. | 0,0188. | 0,0187 |
| 3. . | 1,3. | 5,7. | 2,81. | 16,0. | 0,0298. | 0,0257. | 0,0277 |
| 4. . | 1,3. | 5,8. | 3,17. | 18,4. | 0,0345. | 0,0315. | 0,0305 |
| 5. . | 1,3. | 5,9. | 3,59. | 21,2. | 0,0392. | 0,0392. | 0,0380 |
| 6. . | 1,3. | 6,0. | 3,93. | 23,6. | 0,0437. | 0,0466. | 0,0455 |
| 7. . | 1,3. | 6,2. | 4,51. | 27,9. | 0,0560. | 0,0620. | 0,0617 |

Explication du tableau.

60. La première colonne de ce Tableau indique le n°. des expériences que nous avons faites. — Il s'est glissé une erreur manifeste dans la note que nous avons prise de l'expérience n°. 10 : la charge étant exactement la même, mais les vitesses différant de plus d'un quart, nos notes donnent la même quantité d'eau motrice à moins de deux millièmes près ; ainsi, nous supprimons ce qui est relatif à cette expérience. Dans celle n°. 9, les pompes ne *tiraient plein* qu'à un $\frac{1}{16}$ près ; et dans celles n°. 11 et 12 à $\frac{1}{5}$ près : leurs charges ont été diminuées dans ce rapport.

La seconde colonne indique la charge $P$, réellement élevée par la machine : on l'a réduite à la circonférence de la roue, en la multipliant par $\frac{2r}{\pi R}$, ainsi que nous l'avons expliqué n°. 30.

La troisième exprime la résistance vaincue par la force motrice : cette résistance se compose, 1°. de la charge indiquée dans la colonne précédente ; 2°. des frottemens auxquels elle donne lieu, et qui sont le quatorzième de sa valeur ; 3°. des frottemens provenant du poids de la machine, et qui exigent une augmentation de force égale à 4,01 myr. ; 5°. de l'inertie de l'appareil qui est donnée par l'expression $0,027v^2$ myr. ; 6°. de l'inertie de la charge que l'on détermine ainsi qu'il a été dit n°s. 38 et 53. Cette résistance représente la force de la machine en mouvement (abstraction faite de la vitesse) : nous l'avons appelée $F$.

La quatrième colonne donne les vitesses, $v$, de la roue, c'est-à-dire, de l'extrémité du rayon de la circonférence à laquelle nous avons supposé que la puissance et la résistance étaient tangentiellement adaptées. Il est égal à celui de la roue, moins les $\frac{1}{3}$ de la profondeur des augets.



La cinquième donne l'effet réel de la machine, qui n'est autre chose que le produit, $Fv$, de la résistance ou poids $F$ par la vitesse $v$. On aurait *l'effet utile*, en multipliant cette même vitesse par les poids indiqués colonne II (soustraction faite du poids des pistons).

Les quantités d'eau indiquées colonne VI sont le résultat de l'observation, et nous les avons eues par les méthodes indiquées n°. 58.

Celles de la colonne VII ont été données par la formule

$$Q = \frac{Fv}{\Pi D' \left(1 - \frac{v}{V}\right)^2} \ldots (A).$$

Enfin, celles qu'on voit dans la colonne VIII, ont été indiquées par la formule

$$Q = \frac{0,9\, Fv}{\Pi . D' \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{2\frac{1}{4}}} \ldots (B)$$

ainsi que nous le dirons dans peu.

Comparaison des résultats de l'expérience et de la théorie.

61. Dans la comparaison, entre les résultats de l'expérience et ceux de la théorie, nous avons principalement à examiner, 1°. jusqu'à quel point les quantités d'eau motrice données par l'observation s'accordent avec celles déduites des formules théoriques ; 2°. quel est le rapport qu'il y a entre l'effet produit et la quantité d'eau dépensée.

1°. Relativement à l'eau dépensée.

62. En parcourant les nombres de la VIIe. colonne, et les comparant à ceux de la VIe.,

nous voyons qu'en somme, ils en diffèrent peu; mais que leur accroissement se fait dans un plus grand rapport : ils sont, en général, un peu plus foibles dans les premières expériences, et un peu plus forts dans les dernières; ce qui dénote que le facteur non constant $(1-\frac{v}{V})^2$, varie dans un trop grand rapport; car, comme la variation dépend du terme fractionnaire $\frac{v}{V}$, il est clair qu'elle sera moins forte, si l'on prend une puissance plus élevée du facteur $(1-\frac{v}{V})^2$: mais alors le dénominateur des valeurs de $Q$ se trouvera plus petit; ces valeurs seront trop fortes, et il faudra les affecter d'un coefficient fractionnaire. Le tâtonnement m'a fait voir que le facteur $\frac{0,9}{(1-\frac{v}{V})^{2\frac{1}{4}}}$ donnait des résultats aussi approchans qu'on pouvait le désirer pour les expériences du 5 septembre. D'après cela, j'ai calculé les nombres de la huitième colonne, par la formule

$$Q = \frac{0,9\,F\,v}{\Pi.\,D'\,(1-\frac{v}{V})^{2\frac{1}{4}}}$$

et l'on voit qu'ils s'accordent aussi bien qu'on peut le désirer avec ceux donnés par l'expérience.

Je répéterai à ce sujet, que les résultats de l'observation ne peuvent eux-mêmes être regardés que comme approximatifs : on n'en peut guère répondre à un 20e., et quelquefois même à un 10e. près : quoique je réglasse, avec autant de soin que je pouvais, l'ouverture de la vanne, comme je la mesurais avec un pied-de-roi ordinaire, dans une position assez gênante et assez promptement; il est souvent possible que je me sois trompé de plus d'un quart de ligne, sur une mesure qui n'était le plus fréquemment que de 6, 8, 10 lignes. La hauteur de l'eau derrière la vanne, était encore plus difficile à prendre, le fluide éprouvant une petite fluctuation, qui faisait alternativement baisser et hausser le niveau de 3, 4, et même 6 lignes. La détermination des vitesses est également susceptible de quelques erreurs, sur-tout dans les 4 premières expériences où nous déterminions, en nombres ronds, le nombre de tours que la roue faisait dans une minute : dans la suite, nous avons compté le nombre de secondes qu'elle employait à faire quatre ou cinq tours, etc. Malgré ces causes inévitables d'irrégularité, on ne peut s'empêcher de voir que les dépenses en eau motrice suivent une certaine loi; et que cette loi est, à très-peu près, celle que j'ai assignée.



J'ai été étonné de l'accord qui règne entre les résultats du calcul et ceux de nos observations, sur-tout de celles où la charge étoit un peu considérable; et ce sont celles qui offrent le plus d'intérêt, sous le rapport de l'application à la pratique. L'anomalie qu'une d'elles, la neuvième, présente doit être entièrement imputée à une erreur d'observation : en effet, dans l'expérience n°. 11, la vitesse et la charge sont à peu près les mêmes; l'effet produit ne diffère pas de $\frac{1}{40}$ dans les deux expériences : la quantité d'eau motrice devroit donc être sensiblement égale; la théorie indique même qu'elle devroit être un peu plus forte dans l'expérience n°. 9 : cependant le Tableau la donne plus foible dans le rapport de 88 à 94. Ainsi, tout porte à croire qu'il y a ici une petite erreur d'observation, et que la quantité d'eau dépensée, dans cette expérience, a été de 0,095. m. cub.

Dans les expériences où la machine ne portoit point de charge, ou plutôt dans celles où elle n'a produit aucun *effet utile*, l'accord est moins satisfaisant, sur-tout dans les petites vitesses. Mais nous avons dit que ces cas intéressaient moins la pratique; et on n'en peut tirer aucune induction contre la théorie, vu que dans ce cas (des petites vitesses), la roue ne se meut que d'un mouvement très-inégal, et n'est plus dans les mêmes circonstances que lorsque son mouvement est sensiblement uniforme.

2°. Sur le rapport entre l'effet et l'eau dépensée.

63. Rappelons le résultat de la théorie, exposé n°. 55. L'équation

$$Q = \frac{Fv}{\Pi D' \left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}$$

nous indique que la quantité d'eau dépensée, $Q$, est en raison directe de l'effet produit $Fv$; en raison inverse d'une quantité, $D'$, dépendant principalement de la grandeur du diamètre, et finalement en raison inverse du carré du facteur $\left(1 - \frac{v}{V}\right)$.

Dans la même roue et dans les vitesses moyennes, $D'$ étant à peu près constant, la quantité d'eau dépensée sera proportionnelle à

$$\frac{Fv}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}$$



ou, en développant en série, à

$$F\left(v + 2\frac{v^2}{V} + 3\frac{v^3}{V^2} + 4\frac{v^4}{V^3} + \text{etc.}\right),$$

ce qui montre que la résistance $F$ restant la même, la quantité d'eau dépensée croîtra dans un plus grand rapport que la vitesse $v$.

Voyons actuellement le résultat de l'expérience sur ce même rapport, et en général la corrélation qui existe entre l'effet produit et la quantité d'eau dépensée. Afin de la montrer, nous allons exposer, dans le Tableau suivant, la série des quantités d'eau indiquées dans la colonne VI; ainsi que celle des effets produits, et nous verrons si elles augmentent dans le même rapport : pour rendre la comparaison plus facile, je réduis toutes les séries à avoir l'unité pour premier terme.

Je distinguerai ici les expériences dans lesquelles la machine ne portoit aucune charge, c'est-à-dire, où il n'y avoit pas d'effet utile réellement produit, d'avec celles dans lesquelles il y en avoit. Je donnerai pour celle-ci, 1°. la série des quantités d'eau dépensées $Q$; 2°. celles des effets produits $Fv$, c'est-à-dire, des résistances $F$ (col. III) multipliées par les vitesses $v$ (col. IV); 3°. celle du produit de ces mêmes résistances par le carré des mêmes vitesses. Je me bornerai aux deux premières séries pour les autres expériences.

*Expériences du 19 novembre.*

| Nº. des exp. | Série des $Q$ | Série des $F v$ | Série des $F v^2$ |
|---|---|---|---|
| 1. | 1,00. | 1,00. | |
| 2. | 1,24. | 1,17. | |
| 3. | 1,48. | 1,45. | |
| 4. | 1,72. | 1,69. | |
| 5. | 1,95. | 1,95. | |
| 6. | 2,17. | 2,16. | |
| 7. | 2,78. | 2,56. | |

*Expériences du 5 septembre.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | 1,00. | 1,00. | |
| 2. | 1,49. | 1,51. | |
| 3. | 1,02. | 1,18. | |
| 4. | 1,52. | 1,66. | |
| 5. | 1,00. | 1,00. | 1,00 |
| 6. | 1,48. | 1,49. | 1,59 |
| 7. | 1,88. | 1,94. | 2,02 |
| 8. | 1,28. | 1,53. | 1,28 |
| 9. | 2,62. | 3,11. | 2,76 |
| 11. | 2,81. | 3.04. | 2,84 |
| 12. | 3,13. | 3,33. | 3,39 |

L'on voit, par ce Tableau de comparaison, que dans les expériences où la machine n'avoit point charge, sur-tout dans celles du 19 novembre, l'effet produit a été sensiblement proportionnel à la quantité d'eau motrice; mais que dans celles où la machine étoit chargée, cette même quantité suivoit plutôt le rapport des résistances multipliées par le carré des vitesses : c'est-à-dire, que la résistance étant la même, l'eau motrice croissait



dans un plus grand rapport que celui de la première puissance de la vitesse. Résultat conforme à celui de la théorie.

J'ai cherché, par une suite de tâtonnemens, quelle était, dans nos expériences, la puissance $x$ entière au fractionnaire, et le coefficient $\omega$ qu'il fallait prendre, pour obtenir une expression analytique de $Q$, assez exacte pour la pratique; et de cette forme $Q = \omega F v^x$. Mais, outre que mes expériences n'étaient pas assez multipliées pour me donner des résultats généralement applicables, de nouvelles occupations m'ayant forcé d'interrompre ce travail, et empêché de mettre la dernière main à ce Mémoire, je ne rendrai pas compte de mes recherches.

64. Je me bornerai à observer que la quantité d'eau nécessaire pour produire un effet quelconque $Fv$, est donnée, avec une exactitude suffisante pour la pratique, par l'équation Conclusion.

$$Q = \frac{F v}{\Pi D' \left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}$$

ou mieux encore, pour les machines ordinaires des mines

$$Q = \frac{0,9 F v}{\Pi D' \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{2\frac{1}{2}}}$$

dans lesquelles

$Q$ = quantité d'eau cherchée.
$F$ = somme des résistances vaincues.
$v$ = vitesse de la roue.
$\Pi$ = poids d'un cube d'eau ayant l'unité de mesure pour côté (100 myr. dans le système métrique).
$D' = 2R - (a + b)$.
$V = \sqrt{2g(D' + h)}$,

$R$ = rayon de la roue (moins les $\frac{2}{3}$ tiers de la profondeur des augets).

$a$ = différence de niveau entre la sommité de la roue et le point où elle reçoit l'eau.

$b$ = différence de niveau entre le bas de la roue et le point où l'eau quitte les augets.

$h$ = différence de niveau entre le point d'où l'eau tombe et celui où elle atteint la roue.

$g$ = action de la gravité. = 9,8088 met.

Quant à la valeur de $F$, elle est donnée par la formule

$$F = S\,\frac{\sin.(c+d)}{\sin.\{(a+b)-(c+d)\}}$$

$$+\frac{2r^2v^2}{3\pi R^3 g}\left\{\frac{(1,5M+E)E}{3M+E}+\frac{(1,5M+E+G)(E+G)}{3M+E+G}\right\}$$

dans laquelle

$S$ $= \sqrt{L^2 + 2LP' \sin. a + P'^2}$

$L$ $= \sqrt{N^2 + 4T^2}$

$N$ = poids de la roue.

$T$ = poids de chacun des deux tirans verticaux.

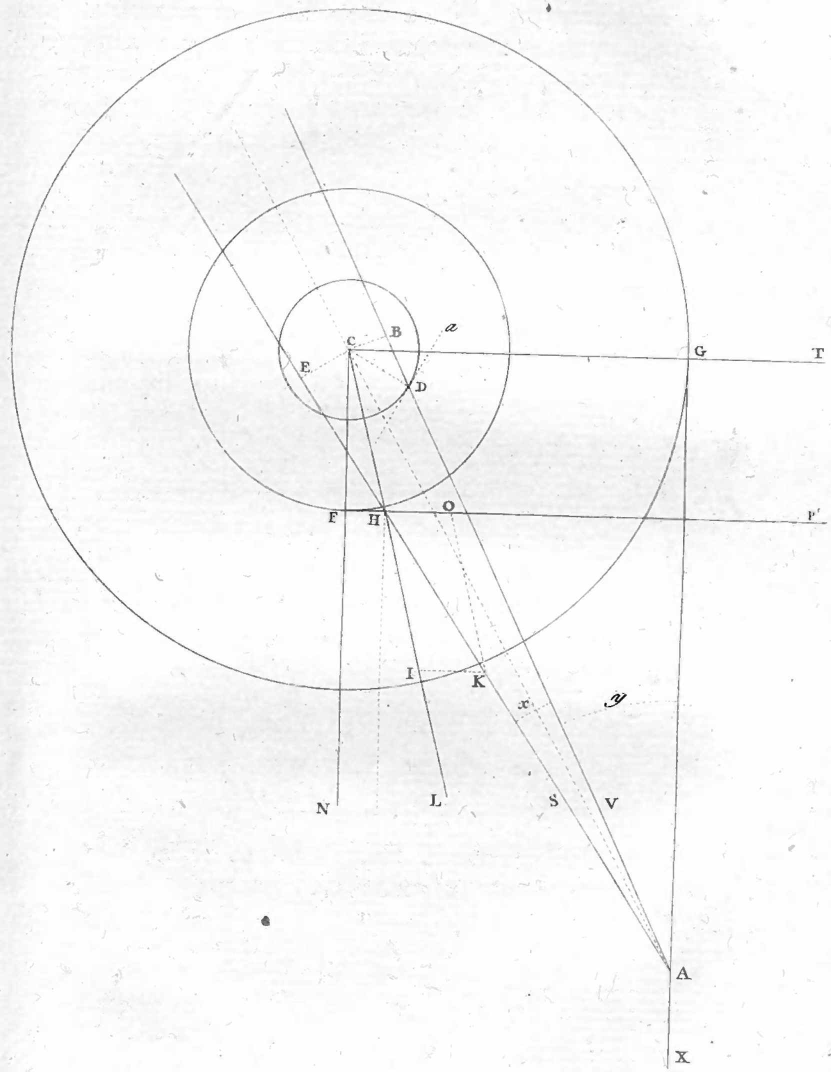
$P'$ $= \frac{1}{2}P(1+\phi)$.

$P$ = charge de la machine, ou poids porté par un tirant.

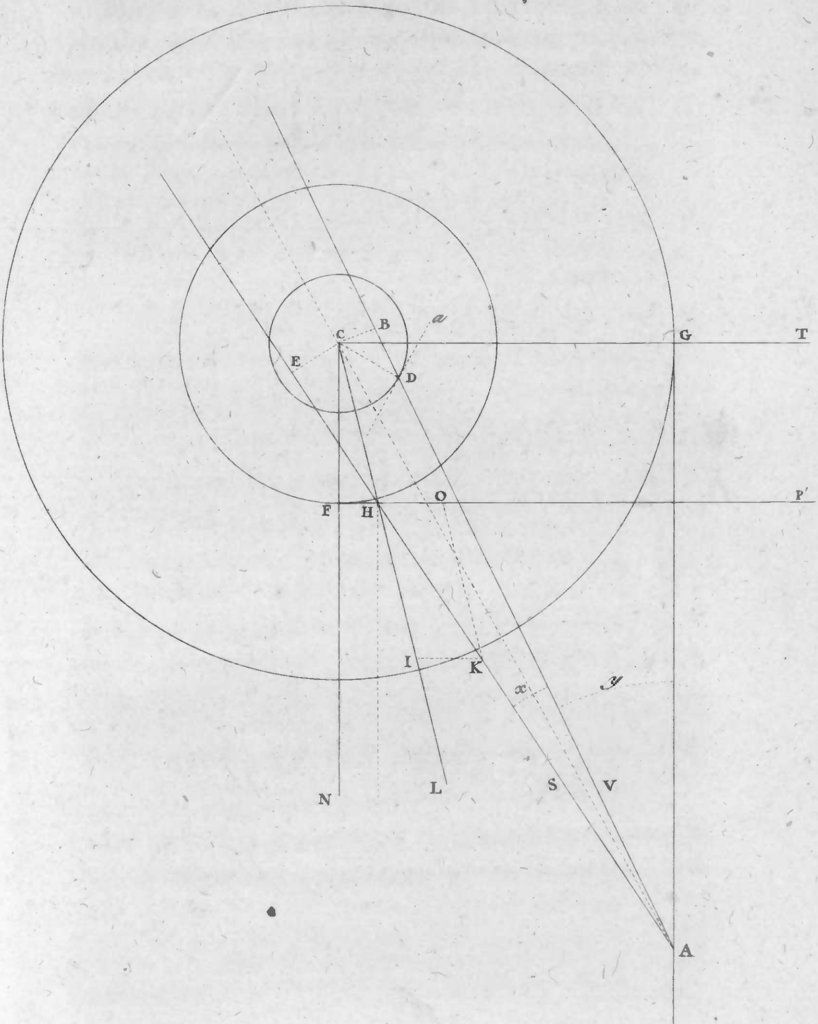
$\phi$ = nombre qui exprime de combien $P$ doit être augmenté à raison des frottemens, provenant

*Vol. 21. Pl. II.*

MACHINES HYDRAULIQUES.



# MACHINES HYDRAULIQUES.




N.L. Rousseau S.

provenant de la pression qu'il occasionne sur les diverses parties de l'attirail, depuis le point où ce poids est adapté, jusqu'aux tourillons de la roue exclusivement.

$$\text{Tang. } a = \frac{2T}{N}.$$

$$\text{Sin. } b = \frac{P'}{S} \text{coss. } a.$$

$$\text{Tang. } c = \frac{\delta \sin.(a+b)}{R + \delta \text{ coss.}(a+b)}.$$

$$\text{Sin. } d = \frac{\sin. c. r' \text{ coss. } e}{\delta}.$$

$$\delta = \frac{P'}{S} \cdot \frac{2r}{\pi}.$$

$e$ = angle du frottement.
$r$ = rayon du cercle décrit par la manivelle.
$r'$ = rayon du tourillon de la roue.
$\pi$ = rap. du diam. à la circ. = 3,1416.
$M$ = moment d'inertie de la roue, rapporté à l'extrémité de la manivelle.
$E$ = masse de la machine (la roue exceptée) à mouvoir rapportée au même point que $M$, d'après la théorie des momens d'inertie.
$b$ = masse de l'eau à mouvoir, rapportée au même point, d'après la même théorie.

Le développement et l'application de ces deux formules fondamentales de la dynamique des machines hydrauliques mues par le poids de l'eau, et telles qu'on les emploie dans les mines, a été développé dans le cours de ce Mémoire.