

la pédale , élève les lacs , ou les laisse à leur place. L'invention de M. Jacquard consiste principalement à avoir remplacé ce cylindre par une chaîne sans fin , composée de rectangles de carton , où sont percés les trous que Vaucanson plaçait sur la surface cylindrique. La réunion de ces rectangles forme une surface prismatique , dont chaque face se meut comme à charnière sur les deux faces voisines , et s'applique successivement sur les faces égales d'un prisme à jour , dont la rotation détermine le mouvement de la chaîne sans fin : on évite par là les inconvéniens du cylindre dont le volume embarrassant , joint à la difficulté de changer de dessin chaque fois qu'on commence une étoffe nouvelle , n'avait pas permis que les ouvriers en adoptassent l'usage. Ce changement se fait presque sans frais sur le métier de M. Jacquard , puisqu'il ne s'agit que de changer des bandes de carton , dont les trous se font promptement et facilement à l'aide d'un emporte-pièce ; aussi depuis deux ans que ce métier est connu , on en a établi plus de soixante dans la seule ville de Lyon , et il y en a quelques-uns sur d'autres points de l'Empire.

JOURNAL DES MINES.

N^o. 144. DÉCEMBRE 1808.

SUR LA

DOUBLE RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE.

DANS LES CRISTAUX DIAPHANES.

Par M. LAPLACE.

LA lumière , en passant de l'air dans un milieu diaphane non cristallisé , se réfracte de manière que les sinus de réfraction et d'incidence sont constamment dans le même rapport ; mais lorsqu'elle traverse la plupart des cristaux diaphanes , elle présente un singulier phénomène , qui fut d'abord observé dans le cristal d'Islande , où il est très-sensible.

Un rayon lumineux qui tombe perpendiculairement sur une des faces naturelles de ce cristal , se divise en deux parties : l'une traverse le cristal sans changer de direction ; l'autre s'en écarte dans un plan parallèle au plan mené perpendiculairement à la face , par l'axe du cristal , c'est-à-dire , par la ligne qui joint les sommets de ses deux angles solides obtus. Cette division du rayon a généralement lieu , relativement à une face quelconque

Volume 24.

C c

naturelle ou artificielle, et quel que soit l'angle d'incidence : une partie suit la loi de la réfraction ordinaire ; l'autre partie suit une loi de réfraction extraordinaire reconnue par Huyghens, et qui, considérée comme un résultat de l'expérience, peut être mise au rang des plus belles découvertes de ce rare génie. Il y fut conduit par la manière dont il envisageait la propagation de la lumière, qu'il supposait formée par les ondulations d'un fluide éthéré. Dans les milieux diaphanes ordinaires, la vitesse de ces ondes était, suivant lui, plus petite que dans le vide, et la même dans tous les sens. Mais il imaginait dans le cristal d'Islande deux espèces d'ondulations : dans l'une, la vitesse était la même suivant toutes les directions, comme dans les milieux ordinaires ; dans l'autre, cette vitesse était variable, et représentée par les rayons d'un ellipsoïde de révolution aplati, dont le centre serait au point d'incidence du rayon lumineux sur la face du cristal, et dont l'axe serait parallèle à l'axe du cristal. Huyghens avait encore reconnu que, pour satisfaire à l'expérience, il fallait représenter la vitesse des ondulations relatives à la réfraction *ordinaire*, par le demi-petit axe de l'ellipsoïde ; ce qui lie d'une manière très-remarquable, les deux réfractions *ordinaire* et *extraordinaire*. Ce grand géomètre n'assignait point la cause de cette variété d'ondulations ; et le singulier phénomène qu'offre la lumière en passant d'un cristal dans un autre, et dont nous parlerons à la fin de ce Mémoire, est inexplicable dans son

hypothèse. Cela joint aux grandes difficultés que présente la théorie des ondes de lumière, a fait rejeter par Newton et la plupart des physiciens qui l'ont suivi, la loi de réfraction qu'Huyghens y avait attachée. Mais M. Malus ayant prouvé par un grand nombre d'expériences très-précises, l'exactitude de cette loi, on doit la séparer entièrement des hypothèses qui l'ont fait découvrir. Il serait bien intéressant de la rapporter, ainsi que Newton l'a fait à l'égard de la réfraction ordinaire, à des forces attractives ou répulsives, dont l'action n'est sensible qu'à des distances insensibles. Il est en effet très-vraisemblable qu'elle en dépend, et je m'en suis assuré par les considérations suivantes.

Le principe de la moindre action a généralement lieu dans le mouvement d'un point soumis à ce genre de forces. En appliquant ce principe à lumière, on peut faire abstraction de la courbe insensible qu'elle décrit dans son passage du vide dans un milieu diaphane, et supposer sa vitesse constante, lorsqu'elle y a pénétré d'une quantité sensible. Le principe de la moindre action se réduit donc alors à ce que la lumière parvient d'un point pris au dehors, à un point pris dans l'intérieur du cristal, de manière que si l'on ajoute le produit de la droite qu'elle décrit au dehors, par sa vitesse primitive, au produit de la droite qu'elle décrit au dedans, par sa vitesse correspondante, la somme soit un *minimum*. Ce principe donne toujours la vitesse de la lumière dans un milieu diaphane, lorsque la loi de la

réfraction est connue ; et réciproquement il donne cette loi , quand on connaît la vitesse. Mais une condition à remplir dans le cas de la réfraction extraordinaire , est que la vitesse du rayon lumineux dans le cristal , soit indépendante de la manière dont il y est entré , et ne dépende que de sa position par rapport à l'axe du cristal , c'est-à-dire , de l'angle que ce rayon forme avec une ligne parallèle à l'axe. En effet , si l'on imagine une face artificielle perpendiculaire à l'axe , tous les rayons intérieurs *extraordinaires* également inclinés à cet axe , le seront également à la face , et seront évidemment soumis aux mêmes forces au sortir du cristal : tous reprendront leur vitesse primitive dans le vide ; la vitesse dans l'intérieur est donc pour tous la même. J'ai reconnu que la loi de réfraction extraordinaire , donnée par Huyghens , satisfait à cette condition ainsi qu'au principe de la moindre action ; ce qui ne laisse aucun lieu de douter qu'elle est due à des forces attractives et répulsives , dont l'action n'est sensible qu'à des distances insensibles. Jusqu'alors on ne pouvait la considérer que comme étant approchée dans des limites moindres que les erreurs inévitables de l'expérience ; maintenant on doit la considérer comme une loi rigoureuse.

Une donnée précieuse , pour découvrir la nature des forces qui la produisent , est l'expression de la vitesse , à laquelle l'analyse m'a conduit , et que je trouve égale à une fraction dont le numérateur est l'unité , et dont le dénominateur est le rayon de l'ellipsoïde précé-

dent , suivant lequel la lumière se dirige , la vitesse dans le vide étant prise pour unité. Je fais voir que la vitesse du rayon ordinaire est l'unité divisée par le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde ; et par ce moyen , la liaison très-remarquable qu'Huyghens avait trouvée par l'expérience , entre les deux réfractions *ordinaire* et *extraordinaire* dans le cristal , est démontrée *a priori* , comme un résultat nécessaire de la loi de la réfraction extraordinaire. La vitesse du rayon *ordinaire* dans le cristal est donc toujours plus grande que celle du rayon *extraordinaire* , la différence des carrés des deux vitesses étant proportionnelle au carré du sinus de l'angle que l'axe forme avec ce dernier rayon. Suivant Huyghens , la vitesse du rayon extraordinaire dans le cristal , est exprimée par le rayon même de l'ellipsoïde ; son hypothèse ne satisfait donc point au principe de la moindre action ; mais il est remarquable qu'elle satisfasse au principe de Fermat , qui consiste en ce que la lumière parvient d'un point donné au dehors du cristal , à un point pris dans son intérieur , dans le moins de tems possible ; car il est facile de voir que ce principe revient à celui de la moindre action , en y renversant l'expression de la vitesse. Ainsi l'on peut déduire également de ces deux principes , la loi de réfraction donnée par Huyghens. Au reste , cette identité des lois de réfraction , déduites de la manière dont Huyghens envisageait la réfraction de la lumière , avec celles que donne le principe de la moindre action , a lieu généralement , quel que soit le sphéroïde

dont les rayons, suivant lui, expriment la vitesse de la lumière dans l'intérieur du cristal; ce que je démontre très-simplement de la manière suivante.

Huyghens considère un rayon (*voy. la pl. XI*) RC , tombant sur une face naturelle ou artificielle $AF EK$ du cristal d'Islande. En menant un plan CO perpendiculairement à ce rayon, et prenant OK parallèle à CR , pour représenter la vitesse de la lumière dans le vide, il suppose que tous les points $Co o' O$ de l'onde lumineuse, parviennent en même-tems et suivant des directions parallèles, au plan $Ki'i I$, qu'il détermine de cette manière. $AFED$ est un ellipsoïde de révolution dont C est le centre, et CD le demi-axe de révolution, et dont les rayons représentent, suivant Huyghens, les vitesses respectives de la lumière qui suit leurs directions. Il mène par le rayon RC un plan perpendiculaire à la face, et qui la coupe suivant la droite BCK ; et par le point K , il mène dans le plan de la face, KT perpendiculairement à KC . Enfin, par KT il mène un plan KI , qui touche l'ellipsoïde en I . CI est, suivant lui, la direction du rayon réfracté. En effet, il est aisé de voir que dans cette construction, un point quelconque o de l'onde lumineuse parvient en i , suivant la ligne brisée oci , dans le même tems que O parvient en K . CI représentant la vitesse du rayon réfracté, la droite CI est parcourue dans le même tems que la droite OK . Nous prendrons ce tems pour unité de tems, et OK pour unité d'espace. Le point o parvient en c dans un tems

proportionnel à oc , et par conséquent égal à $\frac{Cc}{KC}$. Il parvient de c en i dans l'intérieur du cristal, dans un tems égal au tems que la lumière emploie à parvenir de C en I , multiplié par $\frac{Kc}{CK}$, et par conséquent égal à $\frac{Kc}{KC}$, ci étant parallèle à CI . En ajoutant ce tems à $\frac{Cc}{KC}$, on aura l'unité pour le tems que le point o met à parvenir en i .

Prenons $o'c'$ infiniment près de oc , et parallèle à cette ligne; le point o' parviendra en i' dans une unité de tems. Tirons les droites $c'o$ et $c'i$, et supposons que le point o parvienne en i , suivant la ligne brisée $oc'i$. $c'o'$ étant perpendiculaire à CO , la droite $c'o$ peut être supposée égale à $c'o'$, et les tems employés à les parcourir peuvent être supposés égaux. De plus, le tems employé à parcourir $c'i$ peut être supposé égal au tems employé à parcourir $c'i'$, parce que le plan KI touchant en i le sphéroïde semblable au sphéroïde $AFED$, dont le centre est en c' , et dont les dimensions sont diminuées dans la raison de Kc' à KC , les deux points i et i' peuvent être supposés à la surface de ce sphéroïde. Selon Huyghens, les vitesses suivant $c'i$ et $c'i'$ sont proportionnelles à ces lignes; les tems employés à les parcourir sont donc égaux. Ainsi le tems de la transmission de la lumière, suivant la ligne brisée $oc'i$, est égal à l'unité, comme suivant la ligne brisée $oc'i$: la diffé-

rentielle de ces deux tems est donc nulle ; ce qui est le principe de Fermat.

Il est clair que ce raisonnement a généralement lieu , quelle que soit la nature du sphéroïde et la position des points c et c' sur la face du cristal , et quand même ils ne seraient pas sur la droite CK , pourvu qu'ils en soient infiniment près.

En renversant l'expression de la vitesse , le principe de Fermat donne celui de la moindre action. Les lois de réfraction , qui résultent des hypothèses d'Huyghens , sont donc généralement conformes à ce dernier principe ; et c'est la raison pour laquelle ces hypothèses , quoique fautives , représentent la nature.

Si l'on nomme b le demi-axe de révolution de l'ellipsoïde d'Huyghens , a son demi-grand axe , v la vitesse d'un rayon de lumière dans l'intérieur du cristal , et V l'angle que fait sa direction avec l'axe , le rayon de l'ellipsoïde sera

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cdot \sin^2 V}}$$

Ainsi la vitesse v devant être , par le principe de la moindre action , égale à l'unité divisée par ce rayon , on aura

$$v^2 = \frac{1}{b^2} - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cdot \sin^2 V.$$

Cette vitesse est la plus petite , lorsque le rayon de lumière est perpendiculaire à l'axe du cris-

tal , et alors elle devient $\frac{1}{a}$. Elle est la plus grande , lorsqu'elle est parallèle à cet axe ; et alors elle est égale à $\frac{1}{b}$.

Huyghens a reconnu par l'expérience , que b est le rapport du sinus de réfraction au sinus d'incidence , dans la réfraction ordinaire du cristal d'Islande. Ce résultat très-remarquable , qui lie entre elles les deux réfractions *ordinaire* et *extraordinaire* , est une suite nécessaire de ce que les modifications qui distinguent le rayon ordinaire du rayon extraordinaire ne sont point absolues , mais qu'elles sont uniquement relatives à la position du rayon par rapport à l'axe du cristal. Pour le faire voir , rappelons le singulier phénomène que la lumière présente après son passage à travers un cristal.

En passant dans un cristal , la lumière se divise en deux faisceaux , l'un ordinaire et l'autre extraordinaire , et chacun d'eux sort du cristal sans se diviser. Si l'on conçoit un second cristal placé au-dessous du premier , dans une situation entièrement semblable , alors le rayon ordinaire sera rompu ordinairement en passant dans le second cristal , et le rayon extraordinaire sera rompu extraordinairement. Cela aura lieu généralement si les sections principales des deux faces opposées sont parallèles. On nomme *section principale* d'une face , la section du cristal , par un plan perpendiculaire à cette face , et passant par l'axe du cristal. Mais si les sec-

tions principales sont perpendiculaires entre elles, alors le rayon ordinaire sera rompu extraordinairement en passant dans le second cristal, et le rayon extraordinaire sera rompu ordinairement. Dans les positions intermédiaires, chaque rayon se partagera en deux autres à son entrée dans le second cristal.

Concevons maintenant que l'on présente un rayon rompu ordinairement par un premier cristal, perpendiculairement à un second cristal coupé par un plan perpendiculaire à son axe; il est clair qu'une inclinaison infiniment petite de l'axe sur la face d'incidence, suffit pour changer ce rayon en rayon extraordinaire. Or, cette inclinaison ne peut qu'altérer infiniment peu l'action du cristal, et par conséquent la vitesse du rayon dans son intérieur; cette vitesse est donc alors celle du rayon extraordinaire, et par conséquent elle est égale à $\frac{1}{b}$; ce qui revient au résultat d'Huyghens; car on sait que la vitesse de la lumière dans les milieux diaphanes ordinaires, exprime le rapport des sinus d'incidence et de réfraction, sa vitesse dans le vide étant prise pour unité.

Le principe de la moindre action peut servir encore à déterminer les lois de la réflexion de la lumière; car quoique la nature de la force qui fait rejaillir la lumière à la surface des corps soit inconnue, cependant on peut la considérer comme une force répulsive qui rend en sens contraire à la lumière, la vitesse qu'elle lui fait perdre, de même que l'élasticité restitue aux corps en sens contraire, la vitesse

qu'elle détruit. Or, on sait que dans ce cas, le principe de la moindre action subsiste toujours. A l'égard d'un rayon lumineux, soit ordinaire, soit extraordinaire, réfléchi par la surface extérieure d'un corps, ce principe se réduit à ce que la lumière parvient d'un point à un autre, par le chemin le plus court de tous ceux qui rencontrent la surface. En effet, la vitesse de la lumière réfléchie est la même que celle de la lumière directe; et l'on peut établir en principe général, que lorsqu'un rayon lumineux, après avoir éprouvé l'action de tant de forces que l'on voudra, revient dans le vide, il y reprend sa vitesse primitive. La condition du chemin le plus court donne l'égalité des angles de réflexion et d'incidence, dans un plan perpendiculaire à la surface, ainsi que Ptolémée l'avait déjà remarqué. C'est la loi générale de la réflexion à la surface extérieure des corps.

Mais lorsque la lumière, en entrant dans un cristal, s'est divisée en rayons ordinaire et extraordinaire, une partie de ces rayons est réfléchie par la surface intérieure à leur sortie du cristal. En se réfléchissant, chaque rayon, soit ordinaire, soit extraordinaire, se divise en deux autres; en sorte qu'un rayon solaire, en pénétrant dans le cristal, forme par sa réflexion partielle, à la surface de sortie, quatre faisceaux distincts dont nous allons déterminer la direction.

Supposons d'abord les surfaces d'entrée et de sortie, que nous nommerons *première* et *seconde* face, parallèles; donnons au cristal

une épaisseur insensible, et cependant plus grande que la somme des rayons des sphères d'activité des deux faces. Dans ce cas on prouvera, par le raisonnement qui précède, que les quatre faisceaux réfléchis n'en formeront sensiblement qu'un seul, situé dans le plan d'incidence du rayon générateur, et formant avec la première face, l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Restituons maintenant au cristal son épaisseur; il est clair que dans ce cas, les faisceaux réfléchis, après leur sortie par la première face, prendront des directions parallèles à celles qu'ils avaient prises dans le premier cas: ces faisceaux seront donc parallèles entre eux et au plan d'incidence du rayon générateur; seulement, au lieu d'être sensiblement confondus, comme dans le premier cas, ils seront séparés par des distances d'autant plus grandes, que le cristal aura plus d'épaisseur.

Maintenant, si l'on considère un rayon quelconque intérieur sortant en partie par la seconde face, et en partie réfléchi par elle en deux faisceaux, le rayon sorti sera parallèle au rayon générateur; car la lumière, en sortant du cristal, doit prendre une direction parallèle à celle qu'elle avait en y entrant, puisque les deux faces d'entrée et de sortie étant supposées parallèles, elle éprouve en sortant l'action des mêmes forces qu'elle avait éprouvées en entrant, mais en sens contraire. Concevons par la direction du rayon sorti, un plan perpendiculaire à la seconde face; et dans ce plan, imaginons au dehors du cristal une droite

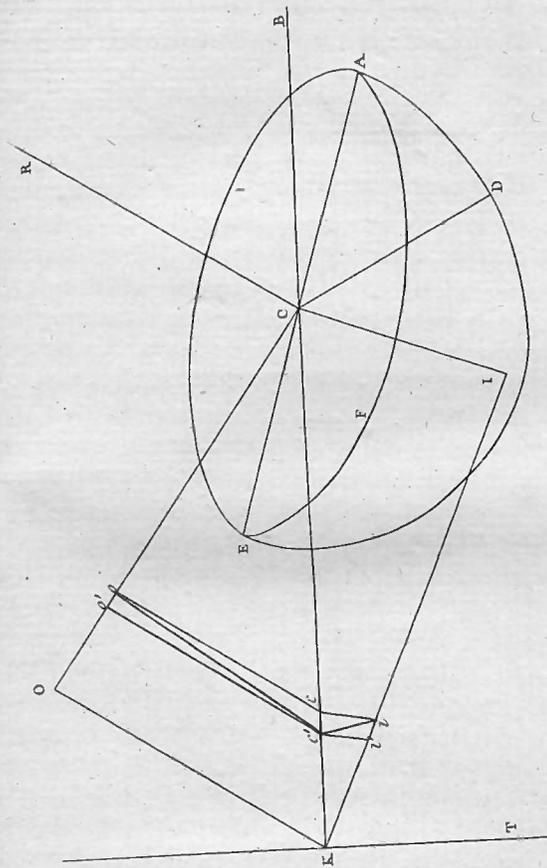
passant par le point de sortie, et formant avec la perpendiculaire à la face, mais du côté opposé à la direction du rayon sorti, le même angle que cette direction; enfin, concevons un rayon solaire entrant suivant cette droite dans le cristal. Ce rayon se partagera à son entrée, en deux autres qui, au sortir du cristal par la première face, prendront des directions parallèles au rayon solaire avant son entrée par la seconde face: elles seront visiblement parallèles aux directions des deux faisceaux réfléchis; ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les deux rayons dans lesquels se divise le rayon solaire en entrant par la seconde face, se confondent respectivement dans l'intérieur du cristal avec les directions des deux faisceaux réfléchis. Or, la loi d'Huyghens donne les directions des rayons dans lesquels le rayon solaire se divise; elle donnera donc aussi celles des deux faisceaux réfléchis dans l'intérieur du cristal.

Si les deux faces du cristal ne sont pas parallèles, on aura par la même loi les directions des deux rayons dans lesquels le rayon générateur se divise en pénétrant par la première face: on aura ensuite, par cette loi, les directions de chacun de ces rayons à leur sortie par la seconde face: ensuite, la construction précédente donnera les directions dans l'intérieur, des quatre faisceaux réfléchis par cette face: enfin, par la loi d'Huyghens, on coucluera leurs directions au sortir du cristal par la première face. On aura donc ainsi tous les phénomènes de la réflexion de la lumière par les surfaces des cristaux diaphanes. M. Malus

414 DOUBLE RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE, etc.

a le premier reconnu ces lois de réflexion de la lumière, et il les a confirmées par un grand nombre d'expériences. Leur accord avec le résultat du principe de la moindre action, achève de démontrer que tous ces phénomènes sont dus à l'action de forces attractives et répulsives.

RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE .



REFRACTION DE LA LUMIERE .

