dans la pierre, et j'en avais ainsi formé, avec du grès à grain fin, le *grès lustré d'Haüy*.

D'après cette observation, j'ai cru pouvoir avancer que les apparences de corps organisés, dans l'agate dont il est question, avaient été formées de même par de petits coups ménagés et frappés les uns à côté des autres.

Je l'ai essayé, et j'ai obtenu ainsi des agates garnies de cônes présentant l'aspect de corps organisés.

L'agate d'Italie paraît avoir été polie après coup, ce qui a enlevé les sommets de plusieurs cônes du milieu de la pierre, et leur a donné un aspect étranger; dans cette agate et dans les miennes, on remarque, à la loupe, de petits cercles aux endroits où les coups ont été donnés; en mouillant les unes et les autres, les cônes disparaissent en partie, à raison du liquide qui pénètre dans les fissures; mais bientôt, en séchant, tous ces cônes reparaissent. M. le marquis de Drée a dans sa belle collection une agate montée en bague, qu'il m'a fait voir dernièrement, laquelle porte des cônes qui me paraissent avoir la même origine.

Le but de cette observation est de prévenir les amateurs que des marchands étrangers savent produire, sur certaines agates, des effets fort agréables, par une disposition artificielle qu'ils peuvent donner comme naturelle, ayant opéré avec assez d'adresse pour en imposer.

SUR

L'APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

A LA PHILOSOPHIE NATURELLE;

Par M. LAPLACE.

QUAND on veut connaître les lois des phénomènes, et atteindre à une grande exactitude, on combine les observations ou les expériences de manière à faire ressortir les élémens inconnus, et l'on prend un milieu entre elles. Plus les observations sont nombreuses, et moins elles s'écartent de leur résultat moyen, plus ce résultat approche de la vérité. On remplit cette dernière condition, par le choix des méthodes, par la précision des instrumens, et par le soin qu'on met à bien observer : ensuite on détermine, par la théorie des probabilités, le résultat moyen le plus avantageux, ou celui qui donne le moins de prise à l'erreur. Mais cela ne suffit pas; il est encore nécessaire d'apprécier la probabilité, que l'erreur de ce résultat est comprise dans des limites données : sans cela, on n'a qu'une connaissance imparfaite du degré d'exactitude obtenu. Des formules, propres à cet objet, sont donc un vrai perfectionnement de la méthode de la philosophie naturelle, qu'il est bien important d'ajouter à cette méthode : c'est une des choses que j'ai eu principalement en vue, dans ma *Théorie analytique des probabilités*, où je suis parvenu à des formules de ce genre, qui ont l'avantage remarquable d'être indépendantes de la loi de probabilité des erreurs, et de ne renfermer que des quantités données par les observations mêmes et par leurs expressions analytiques. Je vais en rappeler ici les principes.

Chaque observation a, pour expression analytique, une fonction des élémens qu'on veut déterminer ; et, si ces élémens sont à peu près connus, cette fonction devient une fonction linéaire de leurs corrections. En l'égalant à l'observation même, on forme ce qu'on nomme *équation de condition*. Si l'on a un grand nombre d'équations semblables, on les combine de manière à former autant d'équations finales qu'il y a d'élémens ; et, en résolvant ces équations, on détermine les corrections des élémens. L'art consiste donc à combiner les équations de condition, de la manière la plus avantageuse. Pour cela, on doit observer que la formation d'une équation finale, au moyen des équations de condition, revient à multiplier chacune de celles-ci par un facteur indéterminé, et à réunir ces produits ; mais il faut choisir le système de facteurs qui donne la plus petite erreur à craindre. Or il est visible que, si l'on multiplie chaque erreur dont un élément déterminé par un système est encore susceptible par la probabilité de cette erreur;, le système le plus avantageux sera celui dans lequel la somme de ces produits, tous pris positivement, est un *minimum;* car une erreur, positive ou négative, peut être considérée comme une perte. En formant donc cette somme de produits, la condition du *minimum* déterminera le système de facteurs le plus avantageux, et le *minimum* d'erreur à craindre sur chaque élément. J'ai fait voir, dans l'ouvage cité, que ce système est celui des coefficiens des élémens dans chaque équation de condition ; en sorte qu'on forme une première équation finale, en multipliant respectivement chaque équation de condition, par son coefficient du premier élément, et en réunissant toutes ces équations ainsi multipliées : on forme une seconde équation finale, en employant les coefficiens du second élément, et ainsi de suite.

J'ai donné, dans le même ouvrage, l'expression du *minimum* d'erreur, quel que soit le nombre des élémens. Ce *minimum* donne la probabilité des erreurs dont les corrections de ces élémens sont encore susceptibles, et qui est proportionnelle au nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, élevé à une puissance dont l'exposant est le quarré de l'erreur pris en moins, et divisé par le quarré du *minimum* d'erreur, multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre. Le coefficient du quarré négatif de l'erreur, dans cet exposant, peut donc être considéré comme le module de la probabilité des erreurs; puisque, l'erreur restant la même, la probabilité décroît avec rapidité quand il augmente; en sorte que le résultat obtenu pèse, si je puis ainsi dire, vers la vérité, d'autant plus que ce module est plus grand. Je nommerai, par cette raison, ce module *poids* du résultat. Par une analogie remarquable de ces poids avec ceux des corps comparés à leur centre commun de gravité, il arrive que, si un même élément est donné par divers systèmes, composés chacun d'un grand nombre d'observations, le résultat moyen le plus avantageux de leur ensemble, est la somme des produits de chaque résultat partiel par son poids, cette somme étant divisée par la somme de tous les poids. De plus, le poids total des divers systèmes, est la somme de leurs poids partiels; en sorte que la probabilité des erreurs du résultat moyen de leur ensemble, est proportionnelle au nombre qui a l'unité pour logarithme hyperbolique, élevé à une puissance dont l'exposant est le quarré de l'erreur, pris en moins, et multiplié par la somme de tous les poids. Chaque poids dépend, à la vérité, de la loi de probabilité des erreurs, dans chaque système : presque toujours cette loi est inconnue; mais je suis heureusement parvenu à éliminer le facteur qui la renferme, au moyen de la somme des quarrés des écarts des observations du système de leur résultat moyen. Il serait donc à désirer, pour compléter nos connaissances sur les résultats obtenus par l'ensemble d'un grand nombre d'observations, qu'on écrivît à côté de chaque résultat le poids qui lui correspond. Pour en faciliter le calcul, je développe son expression analytique, lorsque l'on n'a pas plus de quatre élémens à déterminer. Mais cette expression devenant de plus en plus compliquée, à mesure que le nombre des élémens augmente, je donne un moyen fort simple pour déterminer le poids d'un résultat, quel que soit le nombre des élémens. Alors, un procédé régulier pour arriver à ce qu'on cherche, est préférable à l'emploi des formules analytiques.

Quand on a ainsi obtenu l'exponentielle qui représente la loi de probabilité des erreurs d'un résultat, l'intégrale du produit de cette exponentielle par la différentielle de l'erreur, étant prise dans des limites déterminées, elle donnera la probabilité que l'erreur du résultat est comprise dans ces limites, en la multipliant par la racine quarrée du poids du résultat, divisé par la circonférence dont le diamètre est l'unité. On trouve, dans l'ouvrage cité, des formules très-simples pour obtenir cette intégrale; et M. Kramp, dans son *Traité des réfractions astronomiques*, a réduit ce genre d'intégrales en tables fort commodes.

Pour appliquer cette méthode avec succès, il faut varier les circonstances des observations, de manière à éviter les causes constantes d'erreur, il faut que les observations soient rapportées fidèlement et sans prévention, en n'écartant que celles qui renferment des causes d'erreur évidentes. Il faut qu'elles soient nombreuses, et qu'elles le soient d'autant plus, qu'il y a plus d'élémens à déterminer; car le poids du résultat moyen croît comme le nombre des observations, divisé par le nombre des élémens. Il est encore nécessaire que les élémens suivent dans ces observations une marche fort différente; car, si la marche de deux élémens était rigoureusement la même, ce qui rendrait leurs coefficiens proportionnels dans les équations de condition; ces élémens ne formeraient qu'une seule inconnue, et il serait impossible de les distinguer par ces observations. Enfin il faut que les observations soient précises, afin que leurs écarts du résultat moyen soient peu considérables. Le poids du résultat est par-là beaucoup augmenté, son expression ayant pour diviseur la somme des quarrés de ces écarts. Avec ces précautions, on pourra faire usage de la méthode précédente, et déterminer le degré de confiance que méritent les résultats déduits d'un grand nombre d'observations.

Dans les recherches que j'ai lues dernièrement à l'Institut, sur les phénomènes des marées, j'ai appliqué cette méthode aux observations de ces phénomènes. J'en donne ici deux applications nouvelles : l'une est relative aux valeurs des masses de Jupiter, de Saturne et d'Uranus; l'autre se rapporte à la loi de variation de la pesanteur. Pour le premier objet, j'ai profité de l'immense travail que M. Bouvard vient de terminer sur les mouvemens de Jupiter et de Saturne, dont il a construit de nouvelles tables très-précises. Il a fait usage de toutes les oppositions et de toutes les quadratures observées depuis Bradley, et qu'il a discutées de nouveau avec le plus grand soin; ce qui lui a donné pour le mouvement de Jupiter en longitude, 126 équations de condition. Elles renferment cinq élémens, savoir : le moyen mouvement de Jupiter, sa longitude moyenne à une époque fixe, la longitude de son périhélie à la même époque, l'excentricité de son orbite, enfin la masse de Saturne dont l'action est la source principale des inégalités de Jupiter. Ces équations ont été réduites par la méthode la plus avantageuse, à cinq équations finales, dont la résolution a donné la valeur des cinq élémens. M. Bouvard trouve

ainsi la masse de Saturne égale à la 3512e partie de celle du soleil. On doit observer que cette masse est la somme des masses de Saturne, de ses satellites et de son anneau. Mes formules de probabilité font voir qu'il y a onze mille à parier contre un, que l'erreur de ce dernier résultat n'est pas un centième de sa valeur; ou, ce qui revient à très-peu près au même, qu'après un siècle de nouvelles observations ajoutées aux précédentes, et discutées de la même manière, le nouveau résultat ne différera pas d'un centième de celui de M. Bouvard. Il y a plusieurs milliards à parier contre un, que ce dernier résultat n'est pas en erreur d'un cinquantième; car le nombre à parier contre un croît par la nature de son expression analytique, avec une grande rapidité, quand l'intervalle des limites de l'erreur augmente.

Newton avait trouvé, par les observations de Pound sur la plus grande élongation du quatrième satellite de Saturne, la masse de cette planète égale à la 3012e partie de celle du soleil, ce qui surpasse d'un sixième le résultat de M. Bouvard. Il y a des millions de milliards à parier contre un, que celui de Newton est en erreur; et l'on n'en sera point surpris, si l'on considère l'extrême difficulté d'observer les plus grandes élongations des satellites de Saturne. La facilité d'observer celles des satellites de Jupiter a rendu beaucoup plus exacte la valeur de la masse de cette planète, que Newton a fixée, par les observations de Pound, à la 1067e partie de celle du soleil. M. Bouvard, par l'ensemble de cent vingt-neuf oppositions et quadratures de Saturne, la trouve un 1071[e] de cet astre, ce qui diffère très-peu de la valeur de Newton. Ma méthode de probabilité, appliquée aux cent vingt-neuf équations de condition de M. Bouvard, donne un million à parier contre un, que son résultat n'est pas en erreur d'un centième de sa valeur : il y a neuf cents à parier contre un, que son erreur n'est pas d'un cent cinquantième.

M. Bouvard a fait entrer dans ses équations la masse d'Uranus comme indéterminée : il en a déduit cette masse, égale à la dix-sept mille neuf cent dix-huitième partie de celle du soleil. Les perturbations qu'elle produit dans le mouvement de Saturne, étant peu considérables, on ne doit pas encore attendre des observations de ce mouvement une grande précision dans cette valeur. Mais il est si difficile d'observer les élongations des satellites d'Uranus, qu'on peut justement craindre une erreur considérable dans la valeur de sa masse, qui résulte des observations de M. Herschel. Il était donc intéressant de voir ce que donnent à cet égard les perturbations du mouvement de Saturne. Je trouve qu'il y a deux cent treize à parier contre un, que l'erreur du résultat de M. Bouvard n'est pas un cinquième de sa valeur : il y a deux mille quatre cent cinquante-six à parier contre un, qu'elle n'est pas un quart. Après un siècle de nouvelles observations ajoutées aux précédentes, et discutées de la même manière, ces nombres à parier croîtront au-delà de leurs quarrés; on aura donc alors la valeur de la masse d'Uranus, avec une grande pro-

babilité qu'elle sera contenue dans d'étroites limites.

Je viens maintenant à la loi de la pesanteur. Depuis Richer qui reconnut le premier la diminution de cette force à l'équateur, par le ralentissement de son horloge transportée de Paris à Cayenne; on a déterminé l'intensité de la pesanteur dans un grand nombre de lieux, soit par le nombre des oscillations diurnes d'un même pendule, soit en mesurant directement la longueur du pendule à secondes. Les observations qui m'ont paru mériter le plus de confiance, sont au nombre de trente sept, et s'étendent depuis 67 degrés de latitude boréale jusqu'à 51 degrés de latitude australe. Quoique leur marche soit fort régulière, elles laissent cependant à désirer une précision plus grande encore. La longueur du pendule isochrone, qui en résulte, suit à fort peu près la loi de variation la plus simple; celle du quarré du sinus de la latitude, et les deux hémisphères ne présentent point à cet égard, de différence sensible, ou du moins qui ne puisse être attribuée aux erreurs des observations; mais, s'il existe entre eux une légère différence, les observations du pendule, par leur facilité et par la précision qu'on peut y apporter maintenant, sont très-propres à la faire découvrir. M. Mathieu a bien voulu discuter, à ma prière, les observations dont je viens de parler; et il a trouvé que la longueur du pendule à secondes à l'équateur étant prise pour l'unité, le coefficient du terme proportionnel au quarré du sinus de la latitude, est cinq cent cinquante-un cent millièmes. Mes formules de probabilité, appliquées à ces observations, donnent deux mille cent vingt-sept à parier contre un, que le vrai coefficient est compris dans les limites, cinq millièmes et six millièmes. Si la terre est un ellipsoïde de révolution, on a son aplatissement, en retranchant le coefficient de la loi de la pesanteur, de huit cent soixante-huit cent millièmes. Le coefficient cinq millièmes répond ainsi à l'aplatissement $\frac{1}{272}$; il y a donc quatre mille deux cent cinquante-cinq à parier contre un, que l'aplatissement de la terre est au-dessous : il y a des millions de milliards à parier contre un, que cet aplatissement est moindre que celui qui répond à l'homogénéité de la terre, et que les couches terrestres augmentent de densité, à mesure qu'elles approchent du centre de cette planète. La grande régularité de la pesanteur à sa surface, prouve qu'elles sont disposées symétriquement autour de ce point. Ces deux conditions, suites nécessaires de l'état fluide, ne pourraient pas évidemment subsister pour la terre, si elle n'avait point eu primitivement cet état, qu'une chaleur excessive a pu seule donner à la terre entière. (*Extrait du* Bull. des Sciences.)

SUR
LA CAUSE DE LA COLORATION DES CORPS;

Par M. Biot.

Parmi les observations propres à montrer que les couleurs constantes des corps dépendent uniquement du mode d'agrégation de leurs particules, on en trouverait, je crois, difficilement une plus frappante que la suivante, qui cependant n'a pas été envisagée sous ce point de vue; elle est due à M. Thénard. Ce chimiste ayant distillé avec soin du phosphore à sept à huit reprises, dans la vue de l'obtenir extrêmement pur, trouva qu'il avait acquis, après ces opérations, une propriété nouvelle et inattendue. Si on le fondait dans de l'eau chaude, il devenait transparent et d'un blanc jaunâtre, comme c'est l'ordinaire. Le laissait-on refroidir lentement, il se solidifiait en conservant cette couleur, et restait à demi-transparent; mais si, dans le temps qu'il était fondu, on le jetait dans de l'eau froide, en l'agitant avec un tube de verre pour lui imprimer un refroidissement brusque, il devenait subitement opaque et absolument noir. Cependant il n'avait point changé de nature; car, en le faisant de nouveau fondre, il reprenait sa couleur jaune et sa transparence, et les gardait en se solidifiant, si on le laissait refroidir avec lenteur : de sorte que le même morceau solide de phosphore pouvait à volonté être