A M. Denuelle, à Paris, rue de Crussol, n°. 8 (1392),

Idem, pour *idem* ;

A M. Langlois, à Bayeux, Calvados (n°. 1134),

Pour porcelaine, rappel d'une *Médaille de bronze*, qui lui fut décernée en 1819.

Relativement aux Fabriques de Verrerie, Cristaux et Glaces :

A MM. Godard et compagnie, à Vonêche-Baccarat, Meurthe (n°. 159),

Médaille d'or, pour cristaux ;

A MM. Chagot frères, au Creusot près Mont-Cénis, Saône-et-Loire, et à Paris, Boulevard Poissonnière, n°. 11 (n°. 1639 *bis*),

Pour cristaux, rappel d'une *Médaille d'or*, qui leur fut décernée en 1819 ;

A la Manufacture royale des glaces à Saint-Gobin, et à Paris (n°. 1347),

Pour glaces coulées des plus grandes dimensions, rappel d'une *Médaille d'or*, qui fut décernée à cet établissement en 1806 ;

A MM. Georgeon et Bontemps, à Choisy-le-Roi (n°. 1282),

Médaille d'argent, pour cristaux, glaces soufflées, verres plats et autres ;

A la Manufacture de glaces de Cirey, Meurthe (n°. 1468),

Pour glaces étamées et non étamées, rappel d'une *Médaille d'argent*, qui lui fut décernée en 1819 ;

A M. de Violaine, à Prémontré, Aisne (n°. 358),

Médaille de bronze, pour verres de toutes dimensions et de toutes couleurs.

MÉMOIRE

SUR LA STABILITÉ DES VOUTES,

Par M. G. LAMÉ et E. CLAPEYRON,

Anciens élèves de l'École polytechnique, aspirans-ingénieurs au Corps royal des mines, majors du Génie des voies et communications au service de Russie.

Le projet adopté pour la reconstruction de l'église Saint-Isaac, située sur la place du palais d'hiver à St.-Pétersbourg, présente deux portiques semblables à celui du Panthéon de Rome ; chacun d'eux doit être recouvert par une voûte en berceau et en plein cintre et par deux plates-bandes latérales. La construction de cette voûte, de plus de 40 pieds de diamètre, assise sur des colonnades, sans autre massif latéral pour résister à la poussée, paraît d'une difficulté très-grande, et plusieurs personnes en nient la possibilité. C'est pour examiner si ces doutes ont quelques fondemens, qu'on nous a proposé de calculer la poussée de cette voûte, et d'indiquer les précautions à prendre pour en assurer la stabilité ; on nous a priés, à la même occasion, de reconnaître si le mur cylindrique qui devait soutenir le dôme principal de l'édifice, aurait une épaisseur suffisante pour en empêcher la dégradation.

Parmi les hypothèses sur lesquelles on a fondé la théorie de l'équilibre des voûtes, la seule admissible est celle qui le ramène à l'équilibre de quatre leviers pesans, assemblés à charnières, égaux en poids aux deux portions de la voûte comprises entre le milieu de la clef et les joints de rupture, et à celles limitées par ces joints de rupture et par les bases des pieds-droits. De nombreuses observations sur une grande quantité de voûtes dégradées, et des expériences faites directement par d'habiles constructeurs, ont prouvé que les deux derniers leviers tendent à tourner autour des arrêtes extérieures de leurs bases, et qu'alors les deux premiers se touchant entre eux par l'arrête *extrados* du milieu de la clef, touchent les autres par les arrêtes *intrados* des joints de rupture.

Pour trouver l'équation d'équilibre de ces leviers, il est donc nécessaire de connaître la position des joints où la rupture tend à se faire dans chaque espèce de voûtes. Or, parmi tous les joints que l'on peut concevoir sur les reins d'une demi-voûte, le joint où la rupture tend à se faire, sera celui pour lequel le levier supérieur pressera l'extrémité mobile du levier inférieur, avec une force horizontale dont le moment, pris par rapport à son point fixe, sera le plus grand possible, comparé au moment de la pression verticale exercée à la même extrémité mobile. Il faudrait donc calculer ces momens pour un joint quelconque, en fonction d'une variable, dont on déterminerait la valeur par la condition du *maximum* dont nous venons de parler ; mais l'application du calcul des *maxima* à cette recherche est impraticable, à cause de la complication des calculs auxquels elle donne lieu ; on se contente ordinairement de calculer les rapports des momens pour plusieurs joints supposés, et l'on prend pour joint de rupture celui qui donne le plus grand de tous les rapports obtenus.

Avant d'appliquer cette méthode de tâtonnemens aux questions qu'on nous avait proposées, nous avons voulu nous assurer si l'équation qui exprime l'équilibre d'une voûte ou de ses quatre leviers n'était pas susceptible d'une simplification, telle que l'on pût en déduire la position du joint de rupture d'une manière plus immédiate. Nous avons l'honneur de présenter à l'Académie les résultats de cette recherche. Les formules auxquelles nous sommes arrivés sont assez simples pour pouvoir être traitées par le calcul des *maxima;* on en déduit comme corollaires tous les faits observés jusqu'à présent sur les voûtes, et en outre plusieurs théorèmes que nous croyons nouveaux, et capables de simplifier les recherches que les constructeurs sont obligés de faire pour déterminer théoriquement les joints de rupture et la poussée des voûtes qu'ils sont chargés d'élever.

Théorèmes généraux.

1. Soit ABCDE (*Pl. V*, *fig.* 1) une voûte reposant sur ses deux pieds-droits : d'après les principes que nous venons d'établir, elle tendra à se séparer à la clef et aux reins, les pieds-droits tendront à se renverser en tournant autour des arrêtes extérieures F et G ; le point K de la portion KCBH, étant retenu par la portion correspondante de l'autre moitié de la voûte, descendra suivant la verticale, tandis que le point B s'élèvera en décrivant un arc de cercle autour du point F. La condition de l'équilibre de la voûte est ainsi ramenée à celle de l'équilibre des deux leviers FB et BK, liés à charnières en B, le levier

inférieur a une extrémité fixe en F, et l'extrémité K du levier supérieur est assujettie à se mouvoir suivant la verticale KC.

Soit m le poids du levier supérieur, m' celui du levier inférieur; et BL$=a$, FL$'=a'$; BN$=x$, KN$=y$; FP$=x'$, BP$=y'$; le levier FB est sollicité à son extrémité B par une force verticale égale à $\left(\frac{m'a'}{x'}+m\right)$... dont le moment, par rapport au point fixe F, est $m'a'+m\,x'$; et par une force horizontale, égale à $\frac{ma}{y}$, dont le moment est $\frac{m\,a\,y'}{y}$ (1).

(1) En effet, on peut considérer le levier supérieur comme sollicité par une force m, appliquée au point Q, où la ligne BK est rencontrée par la verticale mL, qui passe par son centre de gravité; on peut supposer la même chose pour le levier inférieur. Maintenant le poids m se décompose en deux, l'un égal à $\frac{m\,a}{x}$, appliqué en K, l'autre égal à $\frac{m\,(x-a)}{x}$, appliqué en B; le poids m du levier KP donne également en K une composante verticale égale à $\frac{m\,a}{x}$, en sorte que ce point est sollicité par une force égale à $\frac{2\,m\,a}{x}$; elle se décompose en deux, dirigées suivant les lignes KB et KD, égales chacune à

$$\frac{m\,a}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y};$$

cette force peut être considérée comme appliquée au point B, où elle se décompose en deux, l'une dirigée suivant la verticale égale à $\frac{m\,a}{x}$, l'autre dirigée suivant l'horizontale égale à $\frac{ma}{y}$. Le poids m' donne aussi en B une composante verticale égale à $\frac{m'\,a'}{x'}$. Le point B du levier BF est donc sollicité par une force verticale égale à

$$\left(\frac{m'\,a'}{x'}+\frac{m\,(x-a)}{x}+\frac{m\,a}{x}\right)=\frac{m'\,a'}{x'}+m,$$

et par une force horizontale égale à $\frac{m\,a}{y}$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Le moment de la force qui tend à renverser la voûte est donc égal à $ma\frac{y'}{y}$, et celui de la force qui tend à la maintenir est $(m'\,a'+m\,x')$: donc le moment de la force qui agit réellement, c'est-à-dire celui de la résultante, sera égal à

$$(.1.)\ (m'\,a'-m\,x')-m\,a\frac{y'}{y},$$

la valeur de ce moment dépend de la position du joint des reins où se fait la séparation de la voûte; si sa valeur est positive pour le point de la voûte où il est un *minimum*, la voûte sera en équilibre stable; si ce moment est nul, l'équilibre sera instantané, et enfin si ce moment est négatif, l'équilibre sera rompu, et la voûte sera renversée.

La valeur de ce moment est donc très-importante, puisque son *minimum* est la mesure de la stabilité de la voûte, et nous avons dû nous attacher à le simplifier. En ajoutant et retranchant de cette expression la quantité ma, il vient

$$\left(m'a'+m(x'+a)\right)-\left(ma+ma\frac{y'}{y}\right)\ldots(1.);$$

or $\left(m'a'+m(x'+a)\right)$ est le moment du centre de gravité de la demi-voûte et du pied-droit, par rapport au point F. Soit M le poids total de cette demi-voûte KCF, et MA son moment par rapport au point F; soit aussi $H=y+y'=KR$, et $y=h=KN$. L'expression du moment deviendra

$$H\left(\frac{MA}{H}-\frac{ma}{h}\right)\ldots\ldots\ldots(1.).$$

Ce résultat conduit à plusieurs conséquences importantes : nous allons en présenter quelques-unes.

2. Et d'abord H et $\frac{MA}{H}$ étant des constantes, on voit que le point de rupture est celui pour lequel $\frac{ma}{h}$ est un *maximum*.

$\frac{ma}{h}$ ne dépendant que de la forme de la partie supérieure de la voûte, si on détermine, pour une voûte quelconque le point de rupture, de quelque manière qu'elle se termine au-delà de ce point, quelles que soient la forme et la hauteur des pieds-droits, le point de rupture restera le même.

Le point de rupture se trouve à la naissance dans toutes les voûtes surbaissées, dont l'origine se trouve au-dessus du point de rupture, déterminé pour la voûte totale.

Lorsqu'ayant calculé pour une voûte quelconque le moment de stabilité, on le trouve négatif ou trop faible, on doit chercher à augmenter sa valeur en chargeant convenablement la voûte. Or, supposons que l'on place sur les reins de cette voûte une masse μ, dont le centre de gravité soit distant de la verticale BP d'une quantité que nous désignerons par z, le moment de stabilité augmentera de. . . .

$$\mu\left(\frac{x'+z}{H}-\frac{z}{h}\right)=\mu\left(\frac{hx'-(H+h)z}{Hh}\right),$$

l'addition de cette charge sera avantageuse si $\frac{x'+z}{H}>\frac{z}{h}$, et préjudiciable dans le cas contraire; l'égalité $z=\frac{hx'}{H+h}$ fixe la limite qu'il ne faut jamais dépasser; en construisant cette valeur de z, on trouve que si on prolonge la ligne FB jusqu'à l'horizontale KV, et que par le point d'intersection X on abaisse et élève une verticale XZ, tout ce qu'on ajoutera à gauche de cette ligne, augmentera la stabilité de la voûte, et tout ce qu'on ajoutera à droite tendra à la diminuer.

Ce résultat n'est entièrement rigoureux que dans le cas où l'addition de cettte masse μ ne change pas la position du point de rupture : aussi est-il applicable au cas d'une voûte très-surbaissée, dans laquelle le point de rupture sera toujours à la naissance; mais, dans le cas général, on doit considérer la limite XZ comme trop éloignée du point de rupture. D'ailleurs ce qu'on doit se proposer dans la pratique est d'augmenter la stabilité de la voûte en employant le moins possible de matériaux : or il est aisé de voir qu'une masse donnée augmente d'autant plus le moment de stabilité, qu'elle se trouve placée plus près de la verticale passant par le point de rupture : c'est donc près de cette ligne sur-tout qu'il est convenable de charger la voûte.

5. Le point de rupture correspond au cas où $\frac{ma}{h}$ est un *maximum*, ainsi que nous venons de l'établir : or, pour qu'on puisse calculer ce *maximum*, et par conséquent déterminer la position du point de rupture, il faut connaître suivant quelle ligne se fait la séparation de la voûte ; l'expérience apprend qu'elle se dirige d'abord normalement à la courbe avec le plan de joint d'un voussoir, puis se redresse et s'élève jusqu'à l'*extrados*, en suivant une ligne plus ou moins sinueuse. Ainsi la ligne de séparation de la voûte est toujours plus ou moins à gauche de la verticale passant par le point de rupture. Pour fixer cette incertitude et être sûr de ne pas arriver à des résultats trop faibles dans la pratique, nous supposerons que la fente se fasse dans la direction à laquelle correspond la valeur *maximum* du moment de BCKH par rapport à BS (*fig.* 2) ; c'est-à-dire suivant la verticale BS elle-même, car toute portion de la masse tendant à se détacher, qui serait située à gauche de BS, diminuerait le moment total en donnant un terme négatif.

Dans cette hypothèse, ma représente le moment de la surface BCKH, BH étant vertical, par rapport à BS. Or, le point de rupture, devant correspondre au cas où $\frac{ma}{h}$ est un *maximum*, est celui pour lequel cette expression est constante lorsqu'on passe d'un point B au point infiniment voisin b ; il faut pour cela que l'on ait : ma est à h comme la différentielle du moment ma est à celle de h. Or, en passant du point de B au point b infiniment voisin sur la courbe *intrados*, h augmente de bD ; et ma de $m \times$ BD, plus le moment de la masse additionnelle BbsS, par rapport à la verticale bs, ce dernier moment est un infiniment petit du second ordre, et disparaît devant $m \times$ BD : on a donc au point de rupture.....

$$\frac{ma}{h} = \frac{m \times \mathrm{BD}}{b\mathrm{D}} \text{ ou } \frac{a}{h} = \frac{\mathrm{BD}}{b\mathrm{D}}.$$

Ce qui apprend *que le point de rupture est celui pour lequel la tangente à l'*intrados, *en ce point, vient couper l'horizontale passant par le sommet de la clef, au même point que la verticale passant par le centre de gravité de la masse tendant à se détacher.* $\frac{ma}{h}$ *est alors égal à la masse m divisée par la tangente de l'angle à l'horizon de la touchante à l'*intrados *au point de rupture.*

Ce résultat remarquable par sa simplicité nous a paru utile à énoncer, parce que, sans exiger aucun calcul, il permet de fixer le point de rupture avec une exactitude suffisante dans la pratique. Il suffit pour cela de construire la courbe, résultante de l'intersection de la tangente en un point quelconque de la courbe intrados, et de la verticale qui passe par le centre de gravité de la surface correspondante; cette courbe coupera l'horizontale qui passe par l'extrémité supérieure de la clef en un point; si par ce point on mène une tangente à la courbe intrados, le point de contact sera le point de rupture. Cette méthode est générale, et s'applique aux voûtes extradossées d'une manière quelconque, et dont la courbe intrados est continue ou discontinue.

Nous ne faisons ici qu'énoncer ce résultat, nous en avons tiré plusieurs conséquences sur la forme à donner aux voûtes pour qu'elles aient le plus de stabilité possible. Nous aurons l'honneur de soumettre dans peu ce nouveau travail au jugement de l'Académie.

Nous allons maintenant appliquer la théorie précédente à la détermination des points de rupture des voûtes en berceau et des voûtes sphériques.

Voûtes en berceaux, cylindriques, d'une épaisseur constante.

4. Dans une voûte en plein cintre, dont les surfaces intrados et extrados sont deux cylindres à bases concentriques circulaires, on peut exprimer simplement la quantité $\frac{m\,a}{h}$ en fonction de l'arc qui sépare le milieu de la clef de l'arrête intrados où la rupture des reins tend à se faire.

Comme la position de l'arrête de rupture est

indépendante de la longueur de la voûte, on peut la prendre égale à l'unité, et supposer que la figure représente la coupe faite au milieu de cette longueur par un plan qui contiendra tous les centres de gravité des différentes parties de la voûte que nous allons considérer. Nous supposerons le joint de rupture normale aux deux cylindres.

Soit r et R les rayons des bases des cylindres intrados et extrados, $r\,\varphi$ l'arc compris entre la clef et le joint de rupture, on aura..... (1)

$$\frac{m\,a}{h} = \frac{\frac{(R^2 - r^2)}{2}\, r\,\varphi \sin.\varphi - \frac{(R^3 - r^3)}{3}(1 - \cos.\varphi)}{R - r\cos.\varphi} \quad (.1.)$$

(1) On aura en effet :

$$h = R - r\cos.\varphi\,;\quad m = \frac{R^2 - r^2}{2}\varphi\,;$$

et $a = r\sin.\varphi - x$; x étant la distance du centre de gravité de la masse m, à la verticale passant par le milieu de la clef. Concevons m décomposé en élémens infiniment petits, par des plans passant par l'axe commun des cylindres faisant entre eux l'angle constant $d\varphi$; le centre de gravité de chacun de ces élémens égaux sera distant de l'axe des cylindres d'une quantité constante r', qui sera déterminée par l'équation....

$$\frac{R^2 d\varphi}{2}\cdot\frac{R}{3} - \frac{r^2 d\varphi}{2}\cdot\frac{r}{3} = \left(\frac{R^2 d\varphi}{2} - \frac{r^2 d\varphi}{2}\right) r' \ldots.$$

d'où

$$r' = \frac{2}{3}\,\frac{(R^3 - r^3)}{(R^2 - r^2)}.$$

Le coefficient différentiel de cette expression, pris par rapport à φ et égalé à zéro, pour en trouver le *maximum*, conduit à l'équation..

$$(.2.)..\ (\mathrm{R} - r\cos.\varphi) - z\,(r - \mathrm{R}\cos.\varphi \ = \frac{2\,(\mathrm{R}^3 - r^3)}{3\,(\mathrm{R} + r)\,r}$$

$$\left(\text{dans laquelle } z = \frac{\varphi}{\sin.\,\varphi}\right)$$

qui a pour racine l'arc φ correspondant à l'arrête de rupture. On voit, d'après la forme de cette équation, que la position du joint de rupture ne dépend que du rapport des deux rayons R et r; ou, ce qui est la même chose, du rapport de l'épaisseur de la voûte à son diamètre.

Cette équation est transcendante, et ne peut donner la valeur de son inconnue que par tâton-

---

r' étant connu, on aura pour déterminer x l'équation.....

$$x\left(\frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{2}\right)\varphi = \int r' \sin.\varphi \left(\frac{\mathrm{R}^2 - r^2}{2}\right) d\varphi \ldots$$

qui donne.... $\varphi x = r'$ (A— cos. φ), la valeur de la constante A est l'unité, car l'intégrale doit s'évanouir pour $\varphi = 0$: on a donc...

$$a = r\ \sin.\,\varphi - \frac{2\,(\mathrm{R}^3 - r^3)}{3\,(\mathrm{R}^2 - r^2)} \cdot \frac{(1 - \cos.\,\varphi)}{\varphi},$$

et par la substitution des valeurs de m, a et h dans $\frac{ma}{h}$, on trouve la valeur indiquée dans l'équation (.1.) ci-contre.

nemens. Voici une table des différens arcs φ avec les valeurs correspondantes de sin. φ, cos. φ et z, qui suffisent dans le plus grand nombre de cas ; l'emploi des logarithmes abrège singulièrement la durée de ces essais.

Valeurs de φ.		Valeurs de sin. φ.	Valeurs de cos. φ.	Valeurs de $z = \frac{\varphi}{\sin.\,\varphi}$
45° ou	0,7854	0,7071	0,7071	1,1133
46	0,80285	0,7193	0,6947	1,1161
47	0,8203	0,73134	0,6820	1,1216
48	0,83776	0,7431	0,6691	1,1273
49	0,8552	0,7547	0,65606	1,1332
50	0,87266	0,7660	0,6428	1,1592
51	0,8901	0,7771	0,6293	1,1453
52	0,9076	0,7880	0,6157	1,1517
53	0,9250	0,7986	0,6018	1,1582
54	0,9425	0,8090	0,5878	1,1649
55	0,9599	0,8191	0,5736	1,1719
56	0,9774	0,8290	0,5592	1,1790
57	0,9948	0,8387	0,5446	1,1862
58	1,0123	0,8480	0,5299	1,1937
59	1,0297	0,8572	0,5150	1,2014
60	1,0472	0,8660	0,5000	1,2090

Nota. Le rayon est toujours supposé égal à l'unité.

Pour donner une idée de la marche qu'on peut suivre, considérons le cas particulier d'une voûte dont l'épaisseur serait le $\frac{1}{16}$ de son diamètre, alors $\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{9}{8}$, et l'équation (.2.) devient ....

$(9 - 8 \cos. \varphi) - z(8 - 9 \cos. \varphi) = 1,0637$ (.3.).. l'hypothèse $\varphi = 45°$, donne, pour le premier membre, une valeur trop grande 1,5218, comme $\varphi = 0$ donne aussi un nombre trop grand 2 ; on en conclut que φ doit être compris entre 45° et 90°. L'hypothèse $\varphi = 60°$ donne au contraire, pour le premier membre de l'équation (.3.) une valeur trop petite 0,7686 ; la véritable valeur de φ est donc comprise entre 45° et 60°. De plus comme les deux hypothèses précédentes ont donné pour résultats des nombres qui s'éloignent du second membre de l'équation (.3.), de 0,5 et de 0,3 environ, on peut croire que la vraie valeur de φ est plus rapprochée de 60° que de 45°, dans le rapport de 3 à 5 : c'est ce qui conduit à essayer $\varphi = 55°$. Cette troisième hypothèse $\varphi = 55°$ donne le nombre 1,0859 encore un peu trop grand, ce qui indique pour φ une valeur plus grande que 55°, et puisque $\varphi = 56°$ donne un résultat trop petit 1,0282, cette vraie valeur est égale à très-peu-près à 55° 23′, en prenant la valeur de $x = 23'$ déterminée par la proportion....

$$x : 60 :: 1,0859 - 1,0637 : 1,0859 - 1,0282\,;$$

et en effet $\varphi = 55°\ 23'$ donne, pour le premier membre de l'équation (.3.), le nombre 1,064, qui ne diffère que de 0,0003 du second membre.

Ainsi une voûte circulaire, dont l'épaisseur constante est le $\frac{1}{16}$ de l'ouverture diamétrale, a son point de rupture situé à 55° 23′ du milieu de la clef, ou à 34° 37′ de la naissance. En faisant dans $\frac{ma}{h}$

donné par l'équation (.1.) $\frac{R}{r} = \frac{9}{8}$ et $\varphi = 55°\ 23'$,

on trouve $\frac{ma}{h} = 5,1515 \left(\frac{r}{8}\right)^2$.

Lorsque le *maximum* de $\frac{ma}{h}$ sera ainsi trouvé, on fera en sorte que $\frac{MA}{H}$ soit plus grand. Supposons, par exemple, que la voûte soit appuyée sur des pieds-droits dont la hauteur soit y et l'épaisseur x, on aura $H = R + y$; le moment MA se composera de celui du pied-droit, qui est $\frac{x^2 y}{2}$ et de celui de la demi-voûte entière, qui est

$$\frac{\pi}{4}(R^2 \quad r^2)(r+x) - \left(\frac{R^3 - r^3}{3}\right) (1),$$

(1) Le moment de la demi-voûte entière est en effet $\frac{\pi}{4}(R^2 - r^2)(r + x - x_1)$; x_1 étant la distance du centre de gravité de cette demi-voûte à la verticale passant par le milieu de la clef, laquelle sera donnée par l'équation

$$x'_1 = \frac{2(R^3 - r^3)}{3(R^2 - r^2)} \cdot \frac{(1 - \cos. \varphi)}{\varphi}$$

ci-dessus calculée, en faisant

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ d'où } x_1 = \frac{2(R^3 - r^3)}{3(R^2 - r^2)} \cdot \frac{2}{\pi},$$

on en conclut.....

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{H}}=\frac{\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{4}\pi\,(\mathrm{R}^2-r^2)\,(r+x)-\frac{1}{3}(\mathrm{R}^3-r^3)}{\mathrm{R}+y}.$$

Il suffira donc pour l'équilibre de prendre x et y, de manière à satisfaire à l'inégalité

$$\frac{\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{4}\pi(\mathrm{R}^2-r^2)\,(r+x)-\frac{1}{3}\,(\mathrm{R}^3-r^3)}{\mathrm{R}+y}>\frac{ma}{h}$$ (valeur maximum.)

Si la hauteur des pieds-droits ainsi que leur épaisseur ne pouvaient être prises arbitrairement, et que $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{H}}$ ne fût pas assez grand, il faudrait charger les reins de la voûte, depuis la naissance jusqu'à la verticale passant par le point de rupture de l'intrados, au moyen d'un mur qu'on élèverait suffisamment.

Voûtes sphériques d'une épaisseur constante.

5. Les fissures de plusieurs dômes, et particulièrement de celui de Saint-Pierre de Rome, apprennent qu'une voûte sphérique tend à se partager en demi-fuseaux par des plans méridiens verticaux. Le nombre de ces demi-fuseaux dépend de celui des parties faibles du mur cylindrique qui soutient la voûte; ainsi le dôme principal de l'église Saint-Isaac à St.-Pétersbourg devant être soutenu par un mur cylindrique percé de douze portes en arcades, tendra à se séparer

en douze parties par des plans méridiens verticaux passant par les milieux des portes.

Pour trouver les conditions de l'équilibre d'une voûte sphérique, il suffit donc d'établir celui du demi-fuseau et de la partie du mur cylindrique comprise entre deux plans méridiens consécutifs.

Cela posé, il tendra à se faire une rupture dans le demi-fuseau, suivant une surface de joint conique ayant pour axe l'intersection commune des plans méridiens, et pour base un petit cercle horizontal de la sphère. D'après ce qui précède, la position du joint de rupture dépendra du maximum de $\frac{ma}{h}$; m étant la masse supérieure qui tend à se détacher du fuseau, h la distance qui existe entre le sommet de l'extrados et le plan horizontal de l'arc intrados du joint, enfin a la plus courte distance entre la corde de cet arc et la verticale passant par le centre de gravité de m.

Soient R et r les rayons des sphères concentriques qui limitent la voûte; $2\mathcal{C}$ l'angle des deux plans méridiens qui comprennent le fuseau, et φ l'angle au centre du cône de joint, on aura (1)

(1) En effet : $h=\mathrm{R}-r\cos.\varphi$; les zones qui ont pour hauteurs $\mathrm{R}\,(1-\cos.\varphi)$, et $r\,(1-\cos.\varphi)$ dans les sphères des rayons R et r, ont pour surfaces $2\pi\mathrm{R}^2(1-\cos.\varphi)$, et $2\pi r^2(1-\cos.\varphi)$; les secteurs sphériques auxquels elles servent de bases ont pour solidité

$$2\pi\,(1-\cos.\varphi)\,\frac{\mathrm{R}^3}{3}\ \text{et}\ 2\pi\,(1-\cos.\varphi)\,\frac{r^3}{3},$$

et les portions de ces secteurs comprises entre les deux plans méridiens qui limitent le fuseau sont

$$2\mathcal{C}\,(1-\cos.\varphi)\,\frac{\mathrm{R}^3}{3}\ \text{et}\ 2\mathcal{C}\,(1-\cos.\varphi)\,\frac{r^3}{3},$$

$$(.1.)\ \frac{ma}{h}=\frac{2\,\mathcal{C}\cos.\mathcal{C}.r\dfrac{(R^3-r^3)}{3}\sin.\varphi\,(1-\cos.\varphi)-\dfrac{(R^4-r^4)}{4}\sin.\mathcal{C}\,(\varphi-\sin.\varphi\cos.\varphi)}{R-r\cos.\varphi}$$

Pour simplifier cette expression, posons

$$P=2\,\mathcal{C}\cos.\mathcal{C}.\ r\frac{(R^3-r^3)}{3},\ \sin.\mathcal{C}\frac{R^4-r^4}{4}=Q,$$

elle deviendra

$$\frac{ma}{h}=\frac{P\sin.\varphi\,(1-\cos.\varphi)-Q\,(\varphi-\sin.\varphi\cos\varphi)..}{R-r\cos.\varphi}$$

---

dont la différence donne

$$m=2\,\mathcal{C}\,(1-\cos.\varphi)\,\frac{R^3-r^3}{3}.\,(m).$$

Enfin, pour trouver a, on peut poser $a=x-x_1$; x étant la distance qui existe entre la corde de l'arc $2\,\mathcal{C}$ et l'axe vertical de la voûte. d'où $x=r\sin.\varphi\cos.\mathcal{C}$; x_1 étant la distance du centre de gravité de m au même axe vertical. Pour trouver la valeur de cette distance, concevons la masse m décomposée en élémens infiniment petits, compris chacun entre les deux sphères, entre deux plans méridiens consécutifs faisant l'angle constant $d\mathcal{C}$, et deux cônes de joint, dont les angles au centre diffèrent constamment de $d\varphi$: si r' est la distance au centre des sphères du centre de gravité de chacun de ces élémens, il sera déterminé par l'équation...

$$r'\left(\frac{R^3-r^3}{3}\right)d\mathcal{C}\,d\varphi=\frac{R^3}{3}\,d\mathcal{C}\,d\varphi.\,\frac{3R}{4}-\frac{r^3}{3}\,d\mathcal{C}\,d\varphi.\frac{3r}{4},$$

d'où

$$r'=\frac{3\,(R^4-r^4)}{4\,(R^3-r^3)}.......$$

le second membre, differencié par rapport à φ, et égalé à zéro, donne....

$$(.2.).\ \frac{2R}{r}=\frac{R+r}{r}.\frac{P}{P-Q}.\frac{1}{1+\cos\varphi.}+\cos.\varphi-\frac{Q}{P-Q}.\frac{\varphi}{\sin.\varphi}..$$

la valeur de φ qui satisfait à cette équation, donnera le joint de rupture et le *maximum* de $\frac{ma}{h}$,

---

et la distance r'' de ce centre de gravité à l'axe vertical de la voûte sera....

$$r''=\frac{3\,(R^4-r^4)}{4\,(R^3-r^3)}\sin.\varphi\,;$$

considérons maintenant tous les élémens égaux dm compris entre les deux cônes faisant entre eux l'angle $d\varphi$, on obtiendra leur somme en différenciant m par rapport à φ, ce qui donne..

$$2\,\mathcal{C}\left(\frac{R^3-r^3}{3}\right)\sin.\varphi\,d\varphi\,,$$

et puisque leurs centres de gravité seront tous distans de de l'axe de r'', le centre de gravité de leur somme sera celui d'un arc $2\,\mathcal{C}\,r''$, dans le cercle de rayon r'', et sera distant de l'axe de la voûte de $x'_1=\frac{r''\sin.\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$: on aura alors

$$mx_1=\int 2\mathcal{C}\left(\frac{R^3-r^3}{3}\right)\sin.\varphi\,d\varphi.\frac{3\,(R^4-r^4)}{4(R^3-r^3)}.\frac{\sin.\mathcal{C}}{\mathcal{C}}.$$

$$\sin.\varphi=\sin.\mathcal{C}\,\frac{(R^4-r^4)}{4}\,(\varphi-\sin.\varphi\cos.\mathcal{C}),$$

d'après cela $\frac{ma}{h}$ étant égal à $\frac{mx-mx}{h}$, la substitution des valeurs trouvées donne l'équation (.1.).

on ne peut la déterminer que par tâtonnemens.

Dans le cas de la voûte de l'église St.-Isaac, on a $R = 34$. p. anglais, $r = 32$. p. anglais, $\beta = \frac{\pi}{12}$, et l'équation (.2.) devient (.3.)...

$$2{,}125 = \frac{4{,}371}{1+\cos.\varphi} + \cos.\varphi - 1{,}119.z..\left(z = \frac{\varphi}{\cos.\varphi}\right),$$

on peut se servir ici de la table et du mode d'essais que nous avons indiqués dans l'application précédente ; alors

Pour $\varphi = 60°$, le second membre de l'équation (.3.) devient . . 2,061.

$\varphi = 45°$. . . . . 2,094.

$\varphi = 67° 30'$. . . . . 2,117.

$\varphi = 68°$. . . . . 2,122.

Or, puisque une différence de 0,005 entre les deux derniers essais correspond à une différence de 0°30' entre les deux angles, on peut admettre qu'une différence de 0,003 entre le dernier essai et le résultat réel exigera une augmentation de 0°18'; et, en effet, l'hypothèse $\varphi = 68°18'$ satisfait jusqu'à la quatrième décimale. Cette valeur de φ donne pour $\frac{ma}{h}$, le nombre de 220.

On peut donc avancer que, *dans une voûte sphérique dans laquelle l'épaisseur constante est le $\frac{1}{32}$ de l'ouverture diamétrale, et qui tend à se partager en 12 demi-fuseaux égaux, il y aura pour chaque fuseau un joint de rupture situé à 68°18' à partir de la clef, ou à 21°42' à partir de la naissance.*

La valeur *maximum* de $\frac{ma}{h}$ étant déterminée dans chaque espèce de voûte sphérique par une méthode analogue à celle que nous venons d'indiquer, on calculera la valeur de $\frac{MA}{H}$, pour s'assurer si le moment de stabilité est positif. M est le poids des parties de la voûte et du mur cylindrique, comprises entre deux plans méridiens consécutifs, A la plus courte distance entre la verticale passant par le centre de gravité de M et la tangente à la base du cylindre extérieur du mur, sur le milieu de l'arc correspondant à l'angle 2β; enfin H est la hauteur du sommet de l'extrados au-dessus du plan de la base du mur cylindrique.

Conclusions.

Nous avons démontré dans ce mémoire :

1°. Que le moment de stabilité d'une voûte quelconque est $H\frac{MA}{H} - \frac{ma}{h}$; MA étant le moment du poids de la demi-voûte entière et de son pied-droit, par rapport à l'arrête extérieure de la base, où le pied-droit tend à se rompre ; H la hauteur du sommet extrados de la clef au-dessus du plan de cette base ; ma le moment de la partie de la voûte comprise entre le milieu de la clef et le joint de rupture, par rapport à l'arrête intrados de ce joint; enfin h étant la hauteur du sommet extrados de la clef au-dessus du plan horizontal mené par cette arrête.

2°. Que le joint de rupture est celui pour lequel $\frac{ma}{h}$ est un *maximum;* qu'il ne dépend pas de la forme de la voûte au-dessous, de la hauteur ni de la largeur des pieds-droits; qu'il est à la naissance pour toutes les voûtes surbaissées, dont l'origine se trouve au-dessus du point de rupture déterminé pour la voûte totale.

3°. Qu'en supposant le joint de rupture vertical (1), ce joint de rupture est celui pour lequel la tangente à la courbe intrados vient rencontrer l'horizontale passant par le sommet de la clef, au même point que la verticale passant par le centre de gravité de la masse, qui tend à se détacher.

4°. Que pour les voûtes en berceau cylindrique d'une épaisseur constante (R et r étant les rayons des cercles extrados et intrados), l'angle φ, compris entre le milieu de la clef et le joint de rupture, est déterminé par l'équation...

$$(R - r\cos.\varphi) - \frac{\varphi}{\sin.\varphi}(r - R\cos.\varphi) = \frac{2}{3}\frac{(R^3 - r^3)}{r(R + r)}.$$

5°. Enfin, que dans les voûtes cylindriques tendant à se partager en $\frac{\pi}{6}$ demi-fuseaux égaux, l'angle φ est déterminé par l'équation...

$$\frac{2R}{r} = \frac{R + r}{r} \cdot \frac{P}{P - Q} \cdot \frac{1}{1 + \cos.\varphi} + \cos.\varphi - \frac{Q}{P - Q} \cdot \frac{\varphi}{\sin.\varphi}$$

dans laquelle

$$P = \frac{2}{3}\left(R^3 - r^3\right) r\,6\cos.6, \text{ et } Q = \frac{1}{4}\left(R^4 - r^4\right)\sin.6.$$

(1) D'après les considérations énoncées (.3.) dans ce mémoire.

SUPPLÉMENT

Au Mémoire sur la stabilité des voûtes;

Par les mêmes.

TROISIÈME APPLICATION.

Voûtes cylindriques circulaires extradossées de niveau.

D'après les considérations exposées dans ce mémoire, nous pouvons supposer que la rupture ait lieu suivant un plan vertical. Soit r le rayon du cylindre, R la distance de son axe au plan extrados, et $r\varphi$ l'arc intrados qui sépare le milieu de la clef du joint de rupture, on trouvera pour $\frac{ma}{h}$ dans le cas que nous examinons:

$$(.1.)\ \frac{ma}{h} = \frac{3Rr^2\sin.^2\varphi - r^3\sin.^2\varphi\cos.\varphi - r^3\left(3\varphi\sin.\varphi - 2(1 - \cos.\varphi)\right)}{6(R - r\cos.\varphi)}$$

Si l'on égale à zéro la différentielle du second membre de cette équation, prise par rapport à φ pour avoir le *maximum* de $\frac{ma}{h}$, on trouve en représentant $\frac{R}{r}$ par K, et $\frac{\varphi}{\sin.\varphi}$ par z...

$$(.2.)\ 3z(1 - K\cos.\varphi) + 2\cos^3.\varphi - 6K\cos.^2\varphi + 3(2K^2 + 1)\cos.\varphi = (3K + 2).$$

Des tâtonnemens analogues à ceux que nous avons indiqués dans les deux applications précédentes, donneront l'arc correspondant au point de rupture, pour chaque valeur particulière de K; cet arc, substitué dans l'équation (.1.), donnera la valeur de $\frac{ma}{h}$, et le calcul de $\frac{MA}{H}$ n'offrant aucune difficulté, on aura le moment de stabilité pour le genre de voûte en question.

Par exemple, on pourra, avec l'aide des deux formules précédentes, calculer la poussée exercée sur des piles culées, par des arches de ponts en arcs de cercles, surbaissés ou en plein cintre : il sera facile alors de déterminer l'épaisseur de ces piles, pour que le moment de stabilité soit positif.

Occupons-nous maintenant de la recherche des formes les plus avantageuses à donner aux voûtes.

Soit $y = f(x)$ l'équation de la base du cylindre intrados d'une voûte cylindrique, $y' = \mathrm{F}(x)$ celle du cylindre extrados, et supposons, comme nous l'avons expliqué plus haut, que le joint de rupture soit un plan vertical; en plaçant l'origine des coordonnées au sommet extrados de la clef, l'axe des x horizontal, celui des y vertical, tous deux dans le plan des courbes $y = f(x)$, $y' = \mathrm{F}(x)$; et en ne considérant l'équilibre de la voûte que sur l'unité de longueur de ses arrêtes, l'expression de $\frac{ma}{h}$ sera

$$\frac{ma}{h} = \frac{x\int_0^x (y'-y)\,dx - \int_0^x x(y'-y)\,dx}{y} \quad (.1.)$$

Le coefficient différentiel de $\frac{ma}{h}$, pris par rapport à x, et égalé à zéro pour avoir son *maximum*, donne

$$\frac{\int_0^x x(y'-y)\,dx}{\int_0^x (y'-y)\,dx} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\frac{dy}{dx}} \quad (.2.)$$

L'abscisse du joint de rupture sera donnée par cette équation, combinée avec celle des deux courbes $y = f(x)$, $y' = \mathrm{F}(x)$, le premier nombre est l'abscisse du centre de gravité de la partie de la voûte, comprise entre le milieu de la clef et le plan de rupture, le second est l'abscisse du point où la tangente au point de rupture de la courbe intrados vient rencontrer l'axe des x. On en conclut ce théorème déjà démontré :

Que dans toute espèce de voûte, la rupture tend à se faire au point où la tangente à la courbe intrados vient couper l'horizontale passant par le sommet de la clef, au même point que la verticale, passant par le centre de gravité de la masse qui tend à se détacher.

L'équation (.2.) donne

$$\frac{x\int (y'-y)\,dx - \int (y'-y)\,x\,dx}{y} = \frac{\int (y'-y)\,dx}{\frac{dy}{dx}}.$$

Lors donc que le point de rupture de la voûte est connu, l'expression *maximum* de $\frac{ma}{h}$ est égale à la masse qui tend à se détacher, divisée par la tangente de l'angle que fait avec l'horizon, la touchante au point de rupture de la courbe intrados; théorème que nous avons aussi démontré d'une autre manière dans ce mémoire.

Dans une voûte quelconque, le choix des courbes intrados et extrados n'est pas arbitraire, si l'on veut que son moment de stabilité soit le plus grand possible. Par exemple, dans le cas d'une voûte surbaissée, extradossée de niveau où les points de rupture sont aux naissances, cette condition suffit pour déterminer la nature de la courbe intrados. En traitant cette question par le calcul des variations, on trouve que l'origine des coordonnées étant à la naissance, et l'axe des y vertical, la courbe intrados qui donne le plus grand moment de stabilité possible, pour les mêmes pieds-droits et la même épaisseur à la clef, est une courbe dont le rayon de courbure est en raison inverse d'une fonction linéaire $(m-x)$ de l'abscisse, m étant une constante qui dépend de l'épaisseur des pieds-droits et de la hauteur du plan de niveau au-dessus des naissances. L'équation différentielle de cette courbe n'est pas intégrable, car elle est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(m-x)^2 - (m-l)^2}{\sqrt{4a^2 - \left((m-x)^2-(m-l)^2\right)^2}}$$

et contient un radical du quatrième degré, (l est la demi-ouverture de la voûte, et a une constante que l'on ne peut déterminer que par approximation, en exprimant que le point de rupture de la voûte doit être à la naissance).

Cette courbe est de même nature que celle que prendrait une paroi cylindrique flexible, soumise à la pression d'un liquide, entre deux plans verticaux, ou que la base de la surface demi-cylindrique, qui termine le mercure déprimé entre deux plans verticaux parallèles et très-voisins. La développée de cette courbe est représentée par une équation assez simple entre l'arc s et l'abscisse δ.

$$s = \frac{a^2}{(m-l)^2}\left\{(m-\delta)^2 - \sqrt{(m-\delta)^2-(m-l)^2}\right\}$$

que l'on pourrait construire par approximation, et d'où l'on déduirait très-aisément la développante.

Cette recherche semble indiquer que les courbes à plusieurs centres dans les ponts surbaissés, tels que celui de Neuilly, sont plus favorables à la solidité que toutes les autres courbes.

On peut se demander s'il n'existerait pas des courbes $y = f(x)$ et $y' = F(x)$, telles que le moment de stabilité fût constant, quelle que fût la position du joint vertical de rupture. Comme $\frac{MA}{H}$ est constant dans une même voûte, il suffit de chercher si $\frac{ma}{h}$ peut l'être aussi; il faut donc que

$$x\int_0^x (y'-y)\,dx - \int_0^x x\,(y'-y)\,dx = c^2\,y.$$

c^2 étant cette constante : or, comme le premier membre doit s'évanouir pour l'hypothèse $x=o$, il faut que c^2 ou y soit nul. Dans le premier cas, il faudrait que la voûte n'eût pas d'épaisseur; dans le second, la hauteur de la clef serait nulle, hypothèse qui n'est pas non plus admissible. Ainsi le moment de stabilité ne peut pas être constant pour toute l'étendue d'une même voûte.

Mais il peut l'être pour tous les points d'une portion de cette voûte. En effet, soient δ et β les coordonnées du point intrados de la voûte, à partir duquel on veut que le moment de stabilité soit constamment égal à ce qu'il est en ce point; on devra avoir pour tous les joints inférieurs

$$(.1.)\; x\int_\delta^x (y'-y)dx - \int_\delta^x x(y'-y)dx + M(x-x_1) = c^2 y.$$

M étant la masse supérieure, et x_1 l'abscisse de son centre de gravité; c^2 est la constante $\frac{ma}{h}$ et est aussi égal à $\frac{M(\delta - x_1)}{\beta}$; en différenciant une première fois cette équation, on trouve pour c^2 une autre valeur $\frac{M}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, δ qui donne $\left(\frac{dy}{dx}\right)\delta = \frac{\beta}{\delta - x_1}$, et indique que le point δ, β devra être celui de la courbe intrados supérieure, pour lequel $\frac{ma}{h}$ est un *maximum*, si l'on veut qu'elle se raccorde avec la courbe inférieure. La seconde équation différentielle de l'équation (.1.) est $y' = y - c\frac{2\,d^2y}{dx^2}$ (.2.); c'est la relation qui doit exister entre les courbes $y = f(x)$ et $y' = F(x)$ pour l'égalité du moment de stabilité de tous les points inférieurs au point (δ, β). Si la courbe intrados est donnée, l'équation (.3.) sera celle de l'extrados; si au contraire la courbe ex-

trados est donnée, elle sera l'équation différentielle du second ordre de la courbe intrados: par exemple, si la voûte devait être extradossée de niveau, on aurait $y' = o$, $y = c^2\frac{d^2y}{dx^2}$; cette équation intégrée donne

$$(x - \delta) = c\,\mathrm{Log.}\left\{\frac{y + \sqrt{M - \beta^2 + y^2}}{\beta + \sqrt{M}}\right\},$$

cette courbe intrados est la projection renversée d'une chaînette sur un plan vertical; on peut déduire de cette considération un moyen pratique pour la construire dans l'occasion.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces recherches, qui sont plus curieuses qu'utiles. Toutes les courbes en usage sont bonnes quand la condition de stabilité est satisfaite, et les légers changemens qu'on voudrait y introduire en ajouteraient peu à leur solidité.

Il serait encore important de considérer dans les voûtes le rapport qui existe entre les pressions exercées dans leurs différens points et la résistance des matériaux, on trouverait que dans la plupart des grandes voûtes la pression que supporte la partie supérieure de la clef et les points de rupture est énorme, et s'exerce sur une très-petite surface. On devrait s'attacher à répartir autant que possible cette pression sur toute l'étendue des plans de joints; mais la solution de cette question, la plus importante qu'il reste à résoudre dans la construction des voûtes, dépend d'un emploi raisonné des mortiers, de la taille des pierres, et de soins minutieux à apporter dans le décintrement; elle n'est donc plus du ressort de l'analyse, c'est aux constructeurs exercés à indiquer là-dessus les méthodes les plus convenables.

Rapport fait à l'Académie royale des sciences, le 26 *mai* 1823, *sur le Mémoire de MM. Lamé et Clapeyron.*

MM. Lamé et Clapeyron, anciens élèves de l'École polytechnique, membres du Corps royal des Mines, et majors du Génie au service de Russie, ont présenté à l'Académie un mémoire qui traite *de la stabilité des voûtes*, sur lequel MM. Dupin et de Prony ont été chargés de faire un rapport.

Ces deux ingénieurs se sont livrés aux recherches dont ils présentent les résultats à l'occasion de la reconstruction de l'église de St.-Isaac, située sur la place du palais d'hiver à St.-Pétersbourg, qui présente deux portiques semblables à celui du Panthéon de Rome, recouvert par une voûte en berceau et en plein cintre et par deux plate-bandes latérales. La voûte, dont le diamètre est de plus de quarante pieds, est assise sur des colonnades, sans autre massif latéral pour résister à la poussée. Il s'agissait d'examiner si les doutes élevés sur sa stabilité avaient quelques fondemens, d'indiquer les précautions à prendre en cas d'affirmative, et de reconnaître, en même temps, si le mur cylindrique destiné à soutenir le dôme principal de l'édifice avait la stabilité suffisante.

Le problème de la stabilité des voûtes en berceau est fort compliqué lorsqu'on veut avoir égard à tous les phénomènes physiquement possibles qui peuvent résulter des actions réciproques des parties qui les composent ; il faut combiner avec la considération des mouvemens de rotation celle des mouvemens de translation ou déplacemens des parties du système, et ces derniers présentent des circonstances très-variées, qui offrent difficilement prise aux théories mathématiques. MM. Lamé et Clapeyron n'ont envisagé la stabilité que relativement aux mouvemens de la première espèce, et ils ont ramené les conditions de l'équilibre d'une voûte en berceau et de ses pieds-droits à celle d'un système de verges rigides et pesantes, dont nous allons exposer la composition.

On admet comme résultat et d'expérience et de raisonnement que lorsque le système d'une voûte en berceau et de ses pieds-droits est constitué de manière que les pieds-droits prennent un mouvement qui tend à les renverser, ce système se sépare en quatre parties, dont deux, placées d'un même côté par rapport à la verticale menée par le milieu de la clef, ont, de l'autre côté, leurs correspondantes semblables et égales. L'une des couples de masse se compose : 1°. d'un pied-droit, auquel reste adhérente une portion de la demi-voûte comprise entre la naissance et un joint qu'on appelle *joint de rupture ;* 2°. du surplus de la demi-voûte, depuis le joint de rupture jusqu'au joint culminant de la voûte. La composition de l'autre couple de masse est exactement la même.

De plus le mouvement de ce système est assujetti aux conditions suivantes : 1°. les arrêtes extérieures des bases des pieds-droits ne changent pas de position, et deviennent des axes fixes de rotation ; 2°. les arrêtes d'intrados des voussoirs contigus au joint de rupture ne se séparent pas ; 3°. la même condition est censée remplie à l'extrados du milieu de la clef, qu'on suppose divisée en deux voussoirs. (Cette hypothèse n'est pas conforme à ce qui se pratique, mais on peut l'admettre ici sans inconvénient.)

Ces arrêtes d'intrados, ou joints de rupture, et d'extrados à la clef, deviennent ainsi des axes mobiles de rotation, et le résultat général du changement de forme du système, lorsque les pieds-droits tournent autour des arrêtes extérieures de leurs bases supposées fixes, est de faire ouvrir le joint de la clef à l'intrados et les joints de rupture à l'extrados.

D'après cette manière d'envisager les effets de la poussée de la voûte, on peut remplacer le système de cette voûte et de ses pieds-droits par quatre verges rigides et pesantes situées dans un même plan vertical ; deux de ces verges partant des arrêtes extérieures des bases des pieds-droits, et se terminant aux intrados des joints de rupture, où se trouvent les extrémités inférieures des deux autres verges qui vont se réunir à l'extrados de la clef.

Le poids de chaque verge représente celui de la masse qu'elle traverse ; les centres de gravité de la verge et de la masse se trouvent sur la même verticale, chaque point de réunion des extrémités des deux verges est une articulation mobile remplaçant un des axes mobiles de rotation ci-dessus mentionnés. Les axes fixes de rotation des bases sont remplacés par des articulations fixes.

On obtient, par ce système hypothétique, une expression analytique de la somme des momens par rapport aux articulations inférieures fixes. Prenant positivement, comme il est d'usage, les momens des forces qui tendent à rapprocher les points de rupture, le signe de la somme, si elle n'est pas nulle, indiquera dans quel sens les pieds-droits doivent tourner autour des articulations fixes ; mais, dans l'état physique des choses, le cas qui donne une somme négative est le seul que l'on considère comme celui de la *non stabilité*. La solidité exige même une somme positive, qui cependant a des limites relatives à diverses circonstances (celle, par exemple, de la compressibilité du sol, qui pourrait permettre l'enfoncement des arrêtes intérieures des pieds-droits), circonstances que les auteurs du mémoire n'ont pas prises en considération.

Lorsque la somme des momens est nulle, il y a indifférence de stabilité, et la plus légère addition de poids à la clef doit occasionner le renversement des pieds-droits.

Les quantités relatives à la position des points de rupture entrent comme inconnues dans l'expression générale des momens dont nous venons de parler. Les premiers géomètres ou ingénieurs qui se sont occupés de la théorie de la stabilité des voûtes, ont éludé la recherche analytique de cette position, en se la donnant *à priori*, et plaçant le point de rupture au milieu de la longueur de la demi-voûte. Une pareille hypothèse ne peut convenir qu'à des cas particuliers ; et d'après une théorie mieux entendue, des auteurs plus récens ont fait consister le caractère distinctif du point de rupture dans la propriété d'offrir le plus

Lorsque la différence $p - n$ est nulle ou négative, il y a ou indifférence ou défaut de stabilité, ce qui nécessite une addition de masses pour rendre $p-n$ positif. MM. Lamé et Clapeyron déterminent l'effet d'un poids placé à une distance horizontale quelconque de l'articulation fixe inférieure, la distance de cette articulation, au-delà de laquelle ce poids diminue la stabilité au lieu de l'augmenter, distance dont ils donnent une construction fort simple, et démontrent que, pour augmenter la stabilité avec le moins de matériaux possible, il faut que les poids additionnels soient peu éloignés de la verticale passant par le point de rupture.

Une autre construction remarquable par sa simplicité et son élégance, et dont on peut tirer un parti utile dans la pratique, est celle que les auteurs donnent pour trouver la position du point de rupture : ils supposent qu'à partir de ce point, la fente de la voûte, si cette voûte se rompait, serait verticale, ce qui n'est pas rigoureusement exact ; mais cette hypothèse favorise la stabilité et ne comporte qu'une erreur négligeable, sur-tout dans les grandes voûtes surbaissées. En l'admettant, on arrive au théorème suivant : « Le point de rupture est celui pour lequel » la tangente à l'intrados, en ce point, vient » couper l'horizontale passant par le sommet de » la clef, au même point que la verticale passant » par le centre de gravité de la portion supé- » rieure de la demi-voûte qui tend à se déta- » cher. »

Élevant des verticales par les centres de gravité de plusieurs portions de la voûte, à partir du sommet, et menant des tangentes à tous les points d'intrados, qui terminent les portions de voûte, la courbe, lieu géométrique des intersections de ces verticales et de ces tangentes, détermine, par sa rencontre avec l'horizontale passant par l'extrados de la clef, un point à partir duquel on mène à la courbe d'intrados la tangente qui résout le problème.

Un avantage remarquable de la nouvelle théorie de la stabilité des voûtes est de faire connaître immédiatement, et par la considération isolée de la partie supérieure de la construction, le degré de résistance qu'il faut donner aux parties inférieures. On peut ainsi établir d'avance des calculs sur différentes espèces de voûtes avant d'avoir rien statué sur les supports ou pieds-droits, dont les formes et les dimensions dépendent ensuite des résultats de ces calculs. On cherche d'abord la position de ce point de rupture par la condition du *maximum* de la quantité n, dont nous avons parlé plus haut ; et ce point étant trouvé, on a aisément la masse, la position du centre de gravité, et le moment de la partie de la voûte qui tend à renverser les pieds-droits.

MM. Lamé et Clapeyron ont donné les équations résolvant le problème de la position du point de rupture pour trois espèces de voûtes, savoir : la voûte en berceau cylindrique, d'une épaisseur constante, que nous désignons par le nom de voûte *extradossée* ; la voûte sphérique pareillement *extradossée*, et la voûte circulaire à extrados horizontal.

Ces équations sont de l'espèce de celles qu'on appelle transcendantes ; l'inconnue, qui est un angle, ne peut se déterminer que par le tâtonnement. Les auteurs en ont fait des applications numériques à deux cas particuliers : l'un, relatif à la voûte circulaire extradossée, et en supposant l'épaisseur constante égale au seizième de l'ouverture, ils trouvent que le joint de rupture, pris perpendiculairement à l'extrados, est situé à 55° 23′ du milieu de la clef, ou à 34° 37′ des naissances, la voûte étant en plein cintre. Dans cette espèce de voûte, la position du joint de rupture ne dépend que du rapport entre les rayons intrados et extrados, ou du rapport entre l'épaisseur de la voûte et son diamètre.

En voulant étendre aux voûtes sphériques l'application de la méthode qui a spécialement pour objet les voûtes en berceau, MM. Lamé et Clapeyron ont été obligés d'ajouter un phénomène de rupture à ceux qui résultent de la non-stabilité de ces dernières voûtes. Ils disent que les fissures de plusieurs dômes, et particulièrement de celui de Saint-Pierre de Rome, ont appris qu'une voûte sphérique tend à se partager en demi-fuseaux par des plans méridiens verticaux ; le nombre de ces demi-fuseaux dépend de celui des parties faibles du mur cylindrique qui soutient la voûte : ainsi le dôme principal de l'église de St.-Isaac à St.-Pétersbourg, devant être soutenu par un mur cylindrique percé de douze portes en arcades, tendra à se séparer en douze parties par des plans méridiens verticaux passant par les milieux des portes.

Ces préliminaires étant admis, il suffit, pour trouver les conditions de l'équilibre d'une voûte sphérique, d'établir celui du demi-fuseau et de

la partie du mur cylindrique compris entre deux méridiens sphériques, en employant une méthode semblable à celle qui s'applique aux voûtes en berceau.

MM. Lamé et Clapeyron déterminent par cette méthode la position du joint de rupture de la voûte sphérique extradossée de l'église de Saint-Isaac, dont les rayons intrados et extrados sont respectivement de 32 et 34 pieds anglais ; ce qui donne pour l'épaisseur de la voûte un 32e. du diamètre intérieur, et ils trouvent que ce joint est à 68° 18′ de la clef, ou 21° 42′ des naissances.

Un supplément au mémoire dans lequel on trouve les formules relatives à la voûte en berceau circulaire à extrados horizontal, renferme de plus la démonstration analytique de la construction géométrique ci-dessus mentionnée, qui donne le point de rupture : les auteurs y ont joint la solution des deux problèmes. Dans l'un, ils cherchent, pour une voûte surbaissée à extrados horizontal, dont le point de rupture serait aux naissances, l'équation de la courbe d'intrados, qui donne le plus grand moment de la stabilité : l'analyse de ce problème appartient à la *méthode des variations*. La courbe cherchée est de la nature de celles que prendrait une paroi cylindrique flexible soumise à la pression d'un liquide entre deux plans verticaux, ou de celle qui est donnée par la section transversale du demi-cylindre qui termine le mercure déprimé entre deux plans verticaux parallèles et très-voisins.

La développée de cette courbe, qui est donnée par une équation assez simple entre l'axe et l'abscisse, pourrait au besoin servir à la construction de la développante, et les auteurs tirent de la solution de ce problème une conséquence favorable, sous le point de vue de la solidité, aux courbes formées par des raccordemens d'arcs de cercles, connues sous le nom d'*anses de panier*.

Dans un second problème, ils se proposent d'examiner s'il n'existe pas des courbes qui donnent un moment de stabilité constant, quelle que soit la position du joint vertical de rupture; ils trouvent que cette condition ne peut pas être satisfaite pour toute l'étendue d'une voûte, mais qu'elle peut l'être pour tous les points d'une portion de cette même voûte. Appliquant leur analyse au cas d'une voûte à extrados horizontal, ils arrivent, pour construire la courbe intrados, à une équation transcendante, qui est la projection renversée d'une chaînette sur un plan vertical.

Au reste, ces dernières recherches sont plus curieuses qu'utiles, les auteurs en conviennent eux-mêmes : « Toutes les courbes en usage, disent-ils, sont bonnes quand la condition de » la stabilité est satisfaite, et les légers change- » mens qu'on voudrait y introduire ajouteraient » peu à leur solidité. »

Observations.

La publicité des premières données expérimentales sur lesquelles on a établi la théorie actuelle de la stabilité des voûtes, date d'environ

un demi-siècle. Perronet, après avoir décintré le pont de Neuilly en 1772, lut, à la rentrée de l'Académie royale des sciences de 1773, un mémoire imprimé parmi ceux que l'Académie a publiés la même année, et dans lequel il décrit les phénomènes de tassement observés au décintrement de plusieurs grands ponts, et particulièrement des ponts de Nogent-sur-Seine et de Neuilly. Ces ponts avaient été projetés de manière à satisfaire pleinement aux conditions de la stabilité; mais aucune disposition raisonnablement praticable ne pouvait empêcher l'effet de la compression des cimens qui garnissaient les joints de lits et celui de la tendance des parties du système à prendre une position d'équilibre qu'ils n'avaient pas rigoureusement sur les cintres : d'ailleurs, en voulant satisfaire à cette dernière condition, on se serait donné un embarras en pure perte, attendu que le remplissage des reins, le pavage, la construction des trottoirs et des parapets ne se font qu'après le décintrement : or, dans tous les phénomènes des tassemens qui ont eu lieu après, et qui ont même commencé à se manifester avant le décintrement, on a constamment remarqué qu'à partir de la clef les joints de lits des cours de voussoirs successifs s'ouvraient à l'intrados, le plus grand écart angulaire étant à la clef, et cette inclinaison diminuant graduellement jusqu'à un joint de lit dont la position varie dans différentes voûtes, auquel correspondaient deux paremens intérieurs de voussoirs parallèles. A partir de ce joint de lit jusqu'aux naissances, les joints s'ouvraient à l'extrados, en suivant, comme ceux de la partie supérieure de la voûte, une loi sensiblement régulière dans leurs écarts.

Il résulte de ces effets que les parties de la voûte placées entre le joint parallèle et les naissances, n'exercent sur les cintres, lorsque les clefs sont posées, qu'une pression faible et même nulle en plusieurs points; ce qui se fait connaître par la facilité avec laquelle on peut enlever plusieurs cales et couchis dont quelques-uns se détachent d'eux-mêmes lorsqu'on se présente pour les enlever. Cette circonstance doit être prise en grande considération dans l'application des méthodes de décintrement.

Nous ajouterons que les tassemens dont nous venons de parler étant prévus d'avance, on a eu soin de surhausser les voûtes en les posant sur les cintres, de manière que l'effet du tassement se réduisit à les ramener à la hauteur projetée, et on avait soin de rendre le surhaussement plutôt fort que faible.

Au pont de Louis XVI, dont les travaux ont été commencés en 1786, et à la construction duquel un des commissaires a été employé comme ingénieur sous les ordres de Perronet, quelques dispositions particulières ont été ajoutées à celle du surhaussement, d'après l'observation des bâillemens de joints qui avaient lieu en différens sens, lors des décintremens antérieurs de plusieurs grands ponts, et pour bien s'assurer du retour de ces joints au parallélisme après les effets de tassement, on a posé les cours de voussoirs sur les cintres en faisant converger leurs paremens intérieurs en sens contraire à celui de la convergence que le décintrement devait leur

donner, de manière que le tassement n'a fait que les ramener au parallélisme. De plus, pour se préparer les moyens de mesurer avec exactitude les effets résultans des phénomènes de tassement, on a tracé sur les plans des têtes de chaque voûte trois lignes droites, l'une horizontale, au-dessus de la clef, s'étendant de part et d'autre de cette clef jusqu'aux points où l'on jugeait que devait se trouver la séparation des parties de voûtes respectivement déprimées et renflées. Les deux autres droites, inclinées, partant des extrémités de l'horizontale, se terminaient vers les coussinets des naissances.

Vingt ans environ après cette opération, on a tracé sur les plans des têtes de nouvelles lignes droites, faisant fonction d'axes des abscisses auxquelles on rapportait par des ordonnées les points de la courbe suivant laquelle s'étaient infléchies les droites anciennement tracées. On a trouvé, comme on s'y attendait, que l'horizontale supérieure s'était déprimée et courbée au-dessous de sa position primitive, l'effet contraire ayant eu lieu pour les lignes inclinées latérales; mais la courbure de ces dernières est beaucoup moins sensible que celle de la première.

Nous mettons sous les yeux de l'Académie un dessin manuscrit de l'arche du milieu, sur lequel ces effets sont représentés graphiquement, et les ordonnées des courbes cotées en millimètres; l'Académie remarquera combien ces courbes sont régulières. Cet heureux résultat tient à des détails tant du projet que de l'exécution, dont l'exposition nous écarterait trop de notre sujet; nous nous bornerons à ajouter que l'arche dont nous présentons le dessin, courbée en arc de cercle de 31 mètres de corde et 4 mètres de flèche, à très-peu-près, ne s'est pas tout-à-fait abaissée de la quantité dont elle avait été surhaussée avant le décintrement, et qu'il est infiniment probable que tout le tassement dont elle est susceptible est opéré depuis plusieurs années.

Ces résultats remarquables ne laissent aucun doute sur la réalité des phénomènes d'après lesquels on a ramené les conditions de la stabilité d'une voûte en berceau à la théorie des actions réciproques de quatre verges pesantes, assemblées à articulation dans un plan vertical. Cette théorie, il est vrai, fait abstraction des ouvertures graduelles de joints, des changemens de forme qui ont lieu entre les points correspondans aux articulations; mais on peut, pour les usages pratiques, supprimer ces considérations, qui d'ailleurs rendraient la solution du problème extrêmement compliquée.

Depuis la lecture et la publication du mémoire de Perronet, et même postérieurement à la construction du pont de Louis XVI, il a été fait des observations sur des modèles de voûtes construites avec soin et dans de grandes proportions, dont les résultats sont conformes à ceux que fournissent les observations des mouvemens des grands ponts: nous avons lieu de croire que les premières sont dues à notre confrère, M. Rondelet, membre de l'Académie des Beaux-Arts. On en trouve la description et la discussion dans le troisième volume de son *Traité de l'art de bâtir*. Un ingénieur des ponts et chaussées, dont la mort récente est un sujet

de douleur et de deuil pour ses amis et ses parens, de regrets amers pour tous ceux qui s'intéressent aux progrès des sciences et des arts, M. Boistard, enlevé subitement à la société à l'époque de sa vie où ses travaux passés donnaient de si belles espérances pour l'avenir, a exécuté et publié sur la même matière une série d'expériences si bien combinées et tellement variées, qu'on jugera peut-être inutile d'en faire désormais de nouvelles, les bases de calcul qu'elles fournissent paraissant fixées définitivement. Nous n'entendons cependant parler ici que des bases de calcul relatives aux cas où les mouvemens des parties des voûtes ont lieu autour d'axes fixes et mobiles, conformément aux explications précédemment données, et que les règles qu'on en déduit ne s'appliqueront pas à des mouvemens d'une autre espèce.

Passons maintenant aux applications théoriques qu'on a faites des expériences dont nous venons de donner la notice.

Depuis la lecture et l'impression du mémoire de Perronet jusqu'à la fin du dernier siècle, il n'a été publié aucune formule, aucune règle de calcul applicable à la stabilité des voûtes, et déduite des phénomènes importans que ce grand ingénieur avait fait connaître. On continuait à faire usage des formules de la Hire, Couplet, Bélidor, etc. En l'année 1800, celui de vos commissaires qui avait été employé comme ingénieur à la construction du pont de Louis XVI, mit au jour un ouvrage ayant pour titre : *Mécanique philosophique*, où il donne, art. 179, l'équation l'équilibre d'une voûte en berceau, en ramenant les conditions que cette équation énonce à celles de l'équilibre d'un système de quatre verges pesantes, assemblées à articulation, absolument identique avec celui qu'on emploie maintenant (1). Quelques années après, en 1809, le *Traité des ponts*, de M. Gauthey, fut publié et enrichi de savantes et intéressantes notes par M. Navier, son neveu, dont le talent et le mérite sont bien connus de l'Académie. A cette époque, M. Boistard avait fait ses expériences, et la détermination du joint de rupture par la condition du *maximum* du rapport entre le moment de la force qui tend à renverser les pieds-droits, et celui de la force qui a une tendance contraire, était publiquement connu; MM. Boistard et Navier l'ont constamment adopté dans leurs recherches sur la stabilité des voûtes.

En 1820, parut dans le n°. 4 du *Mémorial de l'officier du génie*, un beau mémoire de M. Audry, chef de bataillon du même corps, dans lequel cet officier traite avec beaucoup de détail les diverses questions relatives à la mécanique des voûtes: c'est lui qui nous paraît avoir le premier ramené la condition d'après laquelle on détermine le point de rupture à des termes plus simples, en la faisant dépendre, non du *maximum* du

(1) Cette équation est la première de l'article 179; il faut faire attention, en lisant la signification des lettres dans la colonne de *notation*, que par le mot *parement intérieur*, on entend le parement qui, à la culée d'un pont, se trouve du côté des terres, et dont l'arrête inférieure est celle qu'on a désignée dans le mémoire et le rapport par le nom d'arrête *extérieure* de la base du pied-droit, ou axe fixe de rotation.

rapport entre deux momens de forces, mais du *maximum* d'un des termes de la somme de ces momens, ainsi que nous l'avons expliqué précédemment, lorsque nous avons dit que MM. Lamé et Clapeyron avaient introduit dans leur analyse cette même simplification.

On voit, par ce qui précède, que ces deux jeunes ingénieurs ont été devancés dans la découverte des bases fondamentales de la théorie exposée dans leur mémoire; nous ne pensons pas cependant qu'on doive en conclure que le contenu de ce mémoire n'est pas tiré de leur propre fonds. Lorsqu'ils sont sortis de France, ils avaient à peine fini leurs études d'ingénieurs; ils n'ont pas dû connaître avant leur départ des traités qui sont à l'usage exclusif de quelques ingénieurs et architectes. Le mémoire de M. Audry n'était pas encore publié, et ces diverses productions se rencontrent bien plus rarement en Russie qu'en France.

Nous devons ajouter qu'abstraction faite du mérite de l'invention pour ce qui est relatif aux bases de théorie générale, leur travail n'en est pas moins digne d'éloges sur plusieurs objets de détail; la construction géométrique du point de rupture, les problèmes résolus dans le supplément du mémoire, offrent des résultats curieux et nouveaux. La marche de l'analyse concernant deux espèces de voûtes est conduite avec adresse et élégance. L'application qu'ils ont faite aux voûtes en dôme, des formules établies pour les voûtes en berceau, quoique augmentant les chances d'incertitudes dans les résultats, offre des moyens de vérification qui ne sont point à négliger. En général, leur exposition a de la netteté et même de l'originalité, et nous les croyons très-capables d'appliquer utilement l'analyse aux recherches physico-mathématiques.

Si l'Académie partage à cet égard notre façon de penser, son opinion sera pour MM. Lamé et Clapeyron un puissant encouragement à continuer leurs recherches sur les questions qui intéressent les arts de construction, et qui fournissent encore aux ingénieurs savans et laborieux de grands moyens de se distinguer.

Signé DUPIN, DE PRONY, *rapporteur*.

L'Académie approuve le rapport et en adopte les conclusions.

SUITE DU MÉMOIRE

SUR

LES MINES D'ÉTAIN DE SAXE;

PAR M. MANÈS, aspirant au corps royal des Mines (1).

FONDERIES D'ALTENBERG.

Préliminaires.

LES schlichs préparés aux diverses laveries du Stockwerk étaient fondus autrefois dans deux usines, où l'on faisait usage, comme par-tout ailleurs, de petits fourneaux à manche, de sept pieds de hauteur. Cependant on avait reconnu depuis long-temps le désavantage d'une méthode qui ne permettait de fondre que de très-petites quantités à-la-fois, et on se proposait de substituer à ces petits fourneaux des fourneaux plus élevés, lorsqu'en 1806 on construisit à Schlackenwald en Bohême, pour la fonte des minerais d'étain, un fourneau de quinze pieds de haut qui produisit les meilleurs résultats. Le peu d'extraction qu'occasionnèrent les guerres d'alors, et le bas prix auquel tomba l'étain furent autant d'obstacles qui empêchèrent la société d'Altenberg de suivre cet exemple. Ce ne fut qu'à la fin de 1809, que l'étain ayant repris de la valeur, on fit dans l'usine inférieure les changemens que nécessitait la nouvelle méthode de fondage.

(1) Voyez, pag. 499 et suivantes de ce volume, le commencement de ce mémoire.