MÉMOIRE

SUR

LES ENGRENAGES;

PAR MM. LAMÉ ET CLAPEYRON, Ingénieurs au Corps royal des Mines de France, Majors du génie au service de Russie.

1. Nous nous proposons, dans ce mémoire, de présenter d'une manière simple la théorie des engrenages et de résoudre diverses questions importantes pour leur emploi dans la pratique.

Les engrenages ont pour but de transformer un mouvement de rotation autour d'un axe en un mouvement de rotation autour d'un autre axe, ou en un mouvement en ligne droite. Pour résoudre complétement ce problème, on conçoit facilement qu'il suffit de trouver les moyens de transmettre le mouvement de rotation d'un axe à un autre axe parallèle, et ensuite d'un axe à un autre, situé dans le même plan, mais faisant avec lui un angle quelconque: c'est ce qui donne lieu à deux genres d'engrenages, les uns cylindriques, les autres coniques.

Engrenages cylindriques.

2. Pour transmettre le mouvement de rotation d'un axe à un autre axe parallèle, dans un plan qui leur est perpendiculaire, on place deux roues circulaires, tangentes entre elles, et ayant chacune son centre sur un des axes; on fixe ensuite à ces roues des courbes tellement disposées, qu'une des roues tournant uniformément, la courbe

qui lui appartient presse l'autre courbe, et oblige la seconde roue à laquelle elle tient, de tourner aussi uniformément. Pour remplir ce but, ces courbes doivent avoir entre elles une certaine relation, c'est-à-dire qu'en se donnant l'une d'elles arbitrairement, l'autre doit être déterminée. En effet, le mouvement relatif des roues est celui de deux autres roues de même grandeur, desquelles l'une serait fixe, et l'autre roulerait sur la première; la courbe tracée sur la roue considérée comme fixe devra être tangente à toutes les positions de la courbe fixée à la roue mobile, et en sera par conséquent l'enveloppe. Ainsi lorsque l'une des courbes directrices sera donnée, pour trouver l'autre on fera rouler le cercle auquel appartient la première sur le second cercle, et on tracera l'enveloppe des différentes positions que cette directrice donnée occupera sur le plan du cercle fixe : cette enveloppe sera la seconde directrice.

3. Dans ce mouvement, lorsque la directrice donnée passe d'une position à une autre infiniment voisine, son plan tourne autour du point de contact des deux cercles. En effet, les circonférences des deux cercles peuvent être considérées comme des polygones d'une infinité de côtés égaux entre eux, qui se superposent lorsqu'un des cercles roule sur l'autre : en sorte que le plan du cercle mobile tourne successivement autour de chacun des sommets du polygone fixe, et qu'un quelconque de ses points décrit une courbe, composée d'arcs de cercle infiniment petits, dont les centres sont au point de contact des deux roues. Ce raisonnement est applicable à deux courbes en général roulant l'une sur l'autre; c'est-à-dire que le plan de la courbe mobile tourne successivement autour du point de contact de toutes les deux.

Il suit de là qu'il n'existe pas de directrices pour lesquelles le mouvement soit transmis uniformément, sans qu'il y ait de frottement. En effet, pour qu'il n'y eût pas de frottement, il faudrait que l'une des deux directrices roulât sur l'autre ; mais alors en considérant la seconde comme fixe, le plan de la première devrait tourner successivement autour des points de contact de ces courbes, ce qui n'a pas lieu. Le frottement n'est donc nul que lorsque le point de contact des deux directrices se confond avec celui des cercles, ce qui n'a lieu que pour une seule position du système ; pour toutes les autres, il y a nécessairement frottement.

4. Si l'on imagine qu'une courbe quelconque, située dans le plan des cercles, et tangente à tous les deux au même point de contact, roule sur eux, tandis qu'un d'eux roule sur l'autre, le premier point de contact de cette courbe engendrera sur les plans de ces cercles des lignes que l'on pourra prendre pour directrices. En effet, dans ce mouvement, un premier point de contact occupera, à une autre époque, sur les deux cercles et sur la courbe génératrice les trois positions m, M, M', (*fig.* 1, Pl. V); C étant le nouveau point de contact commun, les arcs Cm, CM, CM' seront égaux ; la courbe génératrice ayant roulé sur l'arc CM, son point m aura décrit sur le plan de cet arc la courbe mM, dont la normale en m aura la direction mC; ayant aussi roulé sur l'arc CM', son point m aura aussi décrit sur le plan de cet arc la courbe mM', dont la normale en m aura pareil-

lement la direction mC. Il suit de là que les deux courbes mM, mM′, décrites par un point de la courbe génératrice dans les plans des deux cercles sur les circonférences desquels elle roule, passent toujours par un même point m, où elles ont la même normale et sont par conséquent tangentes: ces deux courbes peuvent donc servir de directrices, et l'une d'elles est l'enveloppe des différentes positions que l'autre peut prendre sur son plan.

5. La courbe génératrice est arbitraire : si c'est la circonférence d'un cercle, les directrices sont des épicycloïdes ; ce genre de directrice est celui dont on fait le plus d'usage dans la pratique. On n'emploie jamais les épicycloïdes entières, on ne prend d'elles que de très-petits arcs à partir de leurs naissances, qui dirigent la transmission du mouvement d'une roue à l'autre, durant un angle de rotation, qui est une certaine fraction de la révolution complète de chaque roue; au moment où ces deux portions de directrices se séparent, d'autres directrices de même nature commencent à se toucher et à se conduire de la même manière. Ces parties de courbes servent de base à des surfaces cylindriques en saillies sur la circonférence de l'une des roues, et en retraits dans l'intérieur de l'autre. Pour permettre aux deux roues de se transmettre réciproquement le mouvement, suivant que le moteur fait tourner l'axe de l'une ou celui de l'autre, 1°. le côté opposé de chaque saillie ou de chaque retrait est formé par une autre épicycloïde, que le cercle générateur décrit sur le plan de chaque roue, en roulant sur elle dans un autre sens; les saillies ne sont pas ordinairement en pointe, elles sont terminées par

un arc de cercle concentrique à la roue, ce qui donne à ces dents plus de largeur, et par conséquent plus de moyens de résister à la rupture; le fond de chaque retrait est terminé par une courbe concave quelconque, qui ne gêne pas le mouvement des dents dans son intérieur; 2°. les portions de la circonférence de chaque roue comprises entre deux dents ou deux retraits consécutifs sont elles-mêmes remplacées par des retraits et des dents limités par d'autres épicycloïdes, qui peuvent aussi communiquer le mouvement. Chaque roue est ainsi limitée par des dents et des retraits qui se succèdent alternativement; mais quelles relations doivent exister entre les divers élémens de ces courbes directrices? Quel doit être leur rapport avec les angles de rotation, dans toute l'étendue desquels ils doivent se toucher, et dont les valeurs ont des limites, au-delà desquelles la construction précédente est impossible? C'est une question que le calcul seul peut résoudre.

6. Soient R et R′ les rayons des deux roues, r celui du cercle générateur, roulant extérieurement sur la circonférence de rayon R, et intérieurement sur celle de rayon R′ : pour trouver les équations des épicycloïdes décrites par un point du cercle générateur, soit pour la première de ces courbes, dont l'origine est A (*fig.* 2), CA l'axe des x, l'angle $\mathrm{TO}m = u$, et par suite l'angle $\mathrm{OCA} = \frac{ru}{\mathrm{R}}$, les valeurs des coordonnées rectangulaires du point m seront

$$x = \mathrm{C}p = \mathrm{CQ} - m\mathrm{R},\; y = mp = \mathrm{OQ} - \mathrm{OR} :$$

or dans le triangle COQ, où $\mathrm{CO} = \mathrm{R} + r$, l'angle

$COQ = \frac{ru}{R}$: donc $CQ = (R + r) \cos \frac{ru}{R}$, $OQ = (R + r) \sin \frac{ru}{}$, et dans le triangle OmR, où $Om = r$, l'angle en $m = OnQ = OCA + COm = u + \frac{ru}{R} = \frac{(R + r)\,u}{R}$. Donc $mR = r \cos \frac{(R+r)u}{R}$, $OR = r \sin \frac{(R + r)\,u}{R}$, on a donc:

$$x = (R + r) \cos \frac{ru}{R} - r \cos \frac{(R + r)\,u}{R};$$

$$y = (R + r) \sin \frac{ru}{R} - r \sin \frac{(R + r)\,u}{R}.$$

L'élimination de u entre ces deux équations conduirait à l'équation en x et y de l'épicycloïde Am. De même, si on voulait avoir l'équation polaire de cette courbe, $cm = V$ étant le rayon recteur, et l'angle $m\,cp = \omega$ étant celui qu'il fait avec l'axe fixe CA, le triangle COm donnant........ $V^2 = (R + r)^2 + r^2 - 2(R + r)\, r \cos u$, et le triangle Cmp...

$$\text{tang}\ \omega = \frac{y}{x} = \frac{(R + r) \sin \frac{ru}{R} - r \sin \frac{(R + r)\,u}{R}}{(R + r) \cos \frac{ru}{R} - r \cos \frac{(R + r)\,u}{R}},$$

il suffira d'éliminer u entre ces deux équations. Pour avoir la longueur de l'arc $Am = s$, les valeurs de x et y donnent

$$dx = \frac{(R + r)\,r}{R} \left\{ -\sin \frac{ru}{R} + \sin \frac{(R+r)\,u}{R} \right\} du,$$

et $$dy = \frac{(R + r)\ r}{R} \left\{ \cos \frac{ru}{R} - \cos \frac{(R+r)\,u}{R} \right\} du.$$

D'où $ds^2 = 2\,\frac{(R + r)r^2}{R^2}\,(1 - \cos u)\,du^2 = 4\,\frac{(R + r)^2\,r^2}{R^2} \sin^2 \frac{1}{2}\,u\,du^2$; d'où $ds = 2\,\frac{(R + r)\,r}{R} \sin \tfrac{1}{2}\,udu$; et en intégrant depuis $u = o$, $S = 4\,\frac{(R + r)\,r}{R}\,(1 - \cos \tfrac{1}{2}\,u)$.

Pour l'épicycloïde $A'm$ (*fig.* 3), soit $C'A'$ l'axe des x', l'angle TOm étant toujours u, l'angle $OC'A'$ sera $\frac{ru}{R'}$, car les arcs Tm, TA' sont égaux; les coordonnées rectangulaires x', y' du point m seront, d'après des considérations analogues à celle de l'article précédent,

$$x' = (R' - r) \cos \frac{ru}{R'} + r \cos \frac{(R' - r)}{R'}\,u,$$

$$y' = (R' - r) \sin \frac{ru}{R'} - r \sin \frac{(R' - r)}{R'}\,u.$$

L'élimination de u entre ces deux équations conduirait à l'équation de l'épicycloïde $A'm$. Dans le cas particulier de $R' = 2r$, $R' - r = r$, les valeurs de x' et y' sont $x' = 2r \cos \frac{u}{2}$, $y' = o$, et l'épicycloïde décrite est l'axe des x' ou le rayon $C'A'$. Ainsi, lorsque le rayon du cercle générateur est la moitié de celui de la roue dans la circonférence de laquelle il roule, il décrit une ligne droite, rayon de la roue, pour courbe directrice. Comme les courbes génératrices sont arbitraires, dans la pratique le rayon du cercle générateur des deux courbes directrices est ordinairement la moitié du rayon de la roue pour laquelle l'épicycloïde est intérieure, en sorte que les retraits des roues d'engrenage sont ordinairement limités des deux côtés par des lignes droites, petites portions de deux rayons de la roue à laquelle ils appartiennent. Dans le cas général, l'arc $A'm = S'$ est $S' = \frac{4r(R'-r)}{R'}(1 - \cos {}_2 u)$. Dans le cas de $R' = 2r$, $S' = R'(1 - \cos \frac{1}{2} u) = R' - x'$.

7. Les valeurs de S et de S', correspondant à un même arc, ru du cercle générateur, sont dans un rapport constant $\frac{R+r}{R} \cdot \frac{R'}{R'-r}$. C'est le rapport des longueurs que doivent avoir les portions d'épicycloïdes directrices des dents et des retraits : $\frac{ru}{R}$, $\frac{ru}{R'}$ sont alors les angles de rotation, dans l'étendue desquels une dent touche toujours au retrait correspondant.

8. Pour trouver la limite de l'angle u, au-delà de laquelle la construction indiquée § 5 est impossible, il faut observer que l'arc $ru = TA$ doit être au moins égal à 2 fois l'arc $R\omega$ + 2 fois l'arc $R'\omega'$, pour que les dents puissent engrener avec les retraits, ou comme les angles ω et ω' sont très-petits, à $2R \operatorname{tang} \omega + 2R' \operatorname{tang} \omega'$. La valeur de tang ω est énoncée plus haut, celle de tang ω' s'en déduit en changeant R en R', et r en r'... et u en $\frac{ru}{r'}$. Ayant ainsi les valeurs de *tang* ω et de *tang* ω', on choisira u, de manière que l'inégalité $ru > 2R \operatorname{tang} \omega + 2R' \operatorname{tang} \omega'$, soit satisfaite. Si l'on voulait que toujours plusieurs des dents d'une roue,

un nombre n en général, touchassent en même temps les retraits de l'autre, il faudrait que u fût pris de manière à satisfaire à l'inégalité $ru > 2n(R \operatorname{tang} \omega + R' \operatorname{tang} \omega')$, l'excès du premier membre sur le second servirait à remplacer les pointes des dents par des parties circulaires concentriques aux roues.

Dans le cas le plus fréquent, les retraits étant limités des deux côtés par des lignes droites, on a $r = \frac{R'}{2}$, $r' = \frac{R}{2}$, en sorte que si l'on désigne par U et U' les angles de rotation des roues correspondant à u et u', angles aux centres des cercles générateurs, avec lesquels ils sont liés par les équations $ru = r'u' = RU = R'U'$, on aura, en remplaçant $\frac{R}{R'}$ par $\frac{U'}{U}$ et r par $\frac{R'}{2}$, r' par $\frac{R}{2}$, u par $2U'$, u' par $2U$,

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{(2U' + U)\sin U - U \sin(2U' + U)}{(2U' + U)\cos U - U \cos(2U' + U)}$$

$$\operatorname{tang} \omega' = \frac{(2U + U')\sin U' - U' \sin(2U + U')}{(2U + U')\cos U' - U' \cos(2U + U')}$$

et l'inégalité à satisfaire sera $U' > 2\left(\frac{U'}{U} \operatorname{tang} \omega + \operatorname{tang} \omega'\right)$ ou $\frac{1}{2} > \frac{\operatorname{tang} \omega}{U} + \frac{\operatorname{tang} \omega'}{U'}$.

Par exemple, lorsque les roues sont égales, on a $R = R'$, d'où $U' = U$, $\operatorname{tang} \omega = \operatorname{tang} \omega'$ $= \frac{3 \sin U - \sin 3U}{3 \cos U - \cos 3U}$, l'inégalité à satisfaire est $\operatorname{tang} \omega < \frac{U}{4}$. Les formules de la trigonométrie donnent $\sin 3U = 3 \sin U - 4 \sin^3 U$, $\cos 3U = 4 \cos^3 U - 3 \cos U$: la valeur de $\tang \omega$ est donc $\frac{4 \sin^3 U}{6 \cos U - 4 \cos^3 U} = \frac{2 \tang^3 U}{3 \tang^2 U + 1}$; soit $\tang U = \frac{1}{n}$, on en déduira $\tang \omega = \frac{2}{n^3 + 3n}$ et $\frac{\tang \omega}{\tang U} = \frac{2}{n^2 + 3}$. U est ordinairement assez petit pour que l'on puisse lui substituer sa tangente : l'inégalité à satisfaire sera donc $\frac{\tang \omega}{\tang U} < \frac{1}{4}$, d'où $\frac{2}{n^2+3} < \frac{1}{4}$, d'où $n > \sqrt{5}$, ou à très-peu près $\frac{9}{4}$: on devra donc avoir $U < \frac{4}{9}$; la circonférence du cercle dont le rayon est 1 étant environ $\frac{44}{7}$, son rapport avec U devra être plus grand que $\frac{99}{7} = \frac{44}{7} : \frac{4}{9}$, ou au moins égal à 18 : ainsi les roues devront avoir au moins de 18 à 20 dents. Cet exemple suffit pour faire voir comment on pourra déterminer en général le *minimum* du nombre de dents de chaque roue, lorsque le rapport des rayons R et R' sera donné.

9. Pour transformer le mouvement de rotation autour d'un axe en un autre autour d'un second axe parallèle au premier, on se sert aussi de deux roues, desquelles l'une a pour surfaces directrices des rouleaux cylindriques placés sur sa circonférence, et l'autre est composée de dents et de retraits ; la courbe qui termine les dents de cette seconde roue est une espèce d'épicycloïde, enveloppe des différentes positions que le rouleau prend lorsque la circonférence de la première roue, sur laquelle est son centre, roule sur celle de la seconde ; les retraits doivent au moins contenir la moitié circulaire d'un rouleau ; il y a de même à déterminer, dans ce cas, les *minima* possibles des nombres de dents et de rouleaux du système, en fonction du rapport des grandeurs des deux roues et du diamètre des rouleaux. Pour y parvenir, soient R le rayon de la roue à dents, r celui de l'autre ; soit aussi a le rayon d'un rouleau, A (*fig.* 4) la position de son centre à l'origine, et à une distance a de ce point sur la tangente au cercle de rayon R, normale à la courbe Am ; soit A' l'origine de la courbe enveloppant les différentes positions du rouleau ; soit aussi m la position de son centre à une époque quelconque, et à une distance a de ce point sur la normale Tm à la courbe Am ; soit m' le point correspondant de l'enveloppe A'm' ; enfin soit CA l'axe des x : l'angle $COm = u$; la ligne $Tm' = Tm - a$, et $Tm = 2r \sin \frac{1}{2} u$; cette ligne Tm' fait avec l'axe des x un angle égal à $OTm - OCA$; le second est égal à $\frac{ru}{R}$ et le premier à la moitié de $200^\circ - u$: la ligne Tm' fait donc avec l'axe des x un angle égal à $100^\circ - \left(\frac{u}{2} + \frac{ru}{R}\right)$, dont le cosinus est $\sin\left(\frac{u}{2} + \frac{ru}{R}\right)$, et le sinus $\cos\left(\frac{u}{2} + \frac{ru}{R}\right)$; l'abscisse du point m' est égale à la somme des projections sur l'axe des x des lignes CT = R et Tm, son ordonnée est égale à la différence des projections de ces mêmes lignes sur l'axe des y : on a donc :

$$x = R \cos \frac{ru}{R} + \left(2r \sin \frac{1}{2} u - a\right) \sin \left(\frac{u}{2} + \frac{ru}{R}\right);$$

$$y = R \sin \frac{ru}{R} - \left(2r \sin \frac{1}{2} u - a\right) \cos \left(\frac{u}{2} + \frac{ru}{R}\right).$$

Si ω désigne l'angle que le rayon vecteur Cm' fait avec CA, il suffira, pour que les dents et les retraits de la roue de rayon R soient compatibles avec l'angle u, que l'on ait $2R < ru$ ou même $2R$ tang $\omega < ru$: or tang ω étant égale au rapport $\frac{y}{x}$, est une fonction connue de u : on pourra donc, au moyen de l'inégalité précédente, déterminer en fonction du rapport $\frac{R}{r}$ et du rayon a des rouleaux le rapport *minimum* de u à 2π, et par suite les nombres *minima* de dents et de rouleaux du système.

10. Pour transformer un mouvement de rotation en un mouvement linéaire dans un sens perpendiculaire à l'axe de rotation, on se sert d'une roue dont l'axe est celui de rotation et dont la circonférence est tangente à la direction suivant laquelle on veut transmettre le mouvement; cette roue est limitée par des dents et des retraits qui engrènent avec des retraits et des dents situés sur la ligne droite, que l'on nomme alors crémaillère. Pour trouver la nature des courbes directrices de ce système, on peut considérer la ligne droite comme la circonférence d'une roue d'un rayon infini, et déduire tout ce qui est relatif à ce cas particulier, du cas général précédemment exposé. Ainsi, pour trouver les courbes des dents de la crémaillère et celles des retraits de la roue, il suffit de faire successivement rouler sur la ligne droite, et dans l'intérieur de la circonférence, un cercle dont le rayon soit moitié de celui de la roue, les lignes tracées par un de ses points seront les courbes directrices demandées. Il suit de là que les dents de la crémaillère seront limitées par des portions de cycloïdes, et que les retraits de la roue seront bordés par des portions de lignes droites. Pour trouver au contraire la forme des dents de la roue et des retraits de la crémaillère, il faut faire rouler sur la circonférence et sur la ligne droite un cercle quelconque, dont un point décrira une épicycloïde et une cycloïde, qui pourront être prises pour courbes directrices. Si l'on voulait que le rayon du cercle générateur fût la moitié de celui de la crémaillère, considérée comme une roue d'un rayon infini, le cercle générateur serait aussi une ligne droite: alors, en roulant sur la circonférence de la roue, un de ses points décrirait la développante du cercle; mais pour rouler sur la crémaillère il ne pourrait la quitter et le retrait serait nul. Il suit de là que les dents de la roue sont limitées par des épicycloïdes ou par des développantes de cercle, et que la crémaillère a des retraits bordés par des cycloïdes, ou des lignes droites dont un seul point est constamment touché.

Pour trouver le rapport des portions de directrices situées sur les dents de la crémaillère et aux flancs des retraits de la roue, on peut dans les valeurs générales $S = \frac{4(R+r)r}{R}(1 - \cos\frac{1}{2}u)$ $S' = 4\frac{r(R'-r)}{R'}(1 - \cos\frac{1}{2}u)$, faire R infini, et $r = \frac{\rho}{2} = \frac{R'}{2}$, R étant le rayon de la crémaillère, prise pour la circonférence d'un cercle, R' ou ρ le rayon de la roue, et r celui du cercle générateur; S et S' deviennent alors, en désignant par $U = \frac{u}{2}$ l'angle au centre de la roue, correspondant à un arc égal à ru, $S = 2\rho(1 - \cos U)$, $S' = \rho(1 - \cos U)$, d'où $\frac{S}{S'} = 2$. La valeur de $R \operatorname{tang} \omega$ se réduit, dans ce cas, à la projection de la portion de cycloïde directrice sur la ligne droite axe de la crémaillère : on la déduit de l'expression

$$R \operatorname{tang} \omega = R \frac{(R+r)\sin\frac{ru}{R} - r\sin\left(u + \frac{ru}{R}\right)}{(R+r)\cos\frac{ru}{R} - r\cos\left(u + \frac{ru}{R}\right)} =$$

$$\frac{R\sin\frac{ru}{R} + r\sin\frac{ru}{R} - r\sin u\cos\frac{ru}{R} - r\cos u\sin\frac{ru}{R}}{\cos\frac{ru}{R} + \frac{r}{R}\cos\frac{ru}{R} - \frac{r}{R}\cos\left(u + \frac{ru}{R}\right)}.$$

En faisant R infini, alors

$$\frac{r}{R} = 0, \ \frac{ru}{R} = 0, \ \cos\frac{ru}{R} = 1, \ \sin\frac{ru}{R} = 0,$$

et

$$R\sin\frac{ru}{R} = R.\frac{ru}{R} = ru,$$

d'où $R \operatorname{tang} \omega = ru - r\sin u$; ou en fonction de l'angle U..... $R \operatorname{tang} \omega = \rho U - \frac{1}{2}\rho \sin 2U = \rho(U - \sin U \cos U)$.

Le rapport des portions de directrices situées sur les dents de la roue, et aux flancs des retraits de la crémaillère, se déduit des valeurs générales de S et de S'; en y faisant R' infini, la première ne change pas, et la seconde devient

$$S' = 4r\left(1 - \cos\tfrac{1}{2}u\right):$$

le rapport des arcs de la cycloïde et de l'épicycloïde directrice est donc $\frac{S'}{S} = \frac{R}{R+r}$; il devient nul lorsque r est infini, c'est-à-dire lorsque le cercle générateur se réduit à une ligne droite, et l'épicycloïde à une développante de cercle; ce qui confirme que, dans ce cas, les retraits de la crémaillère n'ont pas de courbes flanquantes, ou plutôt que ces directrices se réduisent à un point. Pour r infini la valeur de S se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, on peut la mettre sous la forme

$$S = \frac{4R(Ru + ru)\,ru\,(1 - \cos\frac{1}{2}u)}{R^2 \qquad\qquad u^2},$$

la première fraction se réduit à $4RU^2$, en faisant $ru = RU$, et $u = 0$, la seconde se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $u = 0$, le rapport des différentielles premières de ses deux termes, qui est $\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}u}{2u}$, se réduit aussi à $\frac{0}{0}$; mais celui des différentielles secondes $\frac{\frac{1}{4}\cos\frac{1}{2}u}{2}$ donne $\frac{1}{8}$ pour la vraie valeur de la fraction proposée : on a donc $S = \frac{RU^2}{2}$. La valeur de S' se présente aussi sous une forme indéterminée; mais elle peut se mettre sous la forme

$$S' = 4ru\left(\frac{1 - \cos\frac{1}{2}u}{u}\right) = 4RU\left(\frac{1 - \cos\frac{1}{2}u}{u}\right):$$

or le rapport des différentielles des deux termes de la fraction $\frac{1 - \cos\frac{1}{2}u}{u}$ est $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}u$, et s'évanouit pour $u = 0$: on a donc $S' = 0$.

Dans le cas où r n'est pas infini, la valeur générale de tang ϖ ne souffre aucune modification, en y changeant R en ρ on aura la valeur de ρ tang ω. Lorsque r est infini, u est nul ; mais leur produit ru est égal à RU : ce qui change d'abord l'expression de tang ϖ en

$$\frac{\mathrm{R} \sin \mathrm{U} + r \sin \mathrm{U} - r \sin u \cos \mathrm{U} - r \cos u \sin \mathrm{U}}{\mathrm{R} \cos \mathrm{U} + r \cos \mathrm{U} - r \cos u \cos \mathrm{U} + r \sin u \sin \mathrm{U}},$$

ensuite, puisque $\cos u = 1$, on a $r \sin \mathrm{U} - r \cos u \sin \mathrm{U} = 0$, $r \cos \mathrm{U} - r \cos u \cos \mathrm{U} = 0$,

et $\tang \varpi = \dfrac{\mathrm{R} \sin \mathrm{U} - r \sin u \cos \mathrm{U}}{\mathrm{R} \cos \mathrm{U} + r \sin u \sin \mathrm{U}}$ qui se réduit enfin à

$$\tang \varpi = \frac{\sin \mathrm{U} - \mathrm{U} \cos \mathrm{U}}{\cos \mathrm{U} + \mathrm{U} \sin \mathrm{U}} = \frac{\tang \mathrm{U} - \mathrm{U}}{1 + \mathrm{U} \tang \mathrm{U}},$$

en observant que pour $\mathrm{U} = 0$, $r \sin u = ru = \mathrm{RU}$.

Engrenages coniques.

11. Pour transformer un mouvement de rotation autour d'un axe, dans un mouvement de rotation autour d'un autre axe faisant un angle avec le premier et situé dans le même plan, on se sert de deux roues perpendiculaires à ces axes, limitées par des dents et des retraits à surfaces coniques engrenant les unes dans les autres : les surfaces coniques directrices de ces roues peuvent avoir pour bases deux courbes directrices quelconques.

Ici, comme dans le cas des engrenages cylindriques, une des courbes directrices étant donnée plane ou non, pour trouver l'autre il suffira de faire rouler le cône de la roue à laquelle est fixée cette première courbe sur celui de l'autre roue,

la surface conique enveloppant toutes les positions que prendra cette directrice, sera la seconde surface directrice. On démontrerait d'une manière analogue que ce genre d'engrenage ne peut avoir lieu sans frottement, et qu'enfin si l'on imagine qu'en même temps que les cônes des roues se meuvent l'un sur l'autre, une courbe plane quelconque roule à-la-fois sur deux cercles servant de base à ces cônes, de manière à leur être toujours tangente en leur point de contact, un quelconque de ses points engendrera deux courbes, dont chacune sera située sur l'une des roues, et que l'on pourra prendre pour courbes directrices, ou plutôt comme base des cônes directeurs.

12. On peut prendre pour génératrice un cercle dont le plan serait toujours le même que celui du cercle servant de base au cône de l'une des roues, et dont le rayon serait de même de la moitié de celui de cette roue, les courbes directrices seront, dans ce cas, une ligne droite pour les flancs des retraits de la première roue, et une épicycloïde sphérique pour les dents de la seconde. Pour trouver le minimum du nombre de dents que chaque roue peut posséder, il est nécessaire de connaître les équations d'une épicycloïde sphérique. Soient R le rayon du cercle fixe, r le rayon du cercle générateur et O son centre, i l'angle que leurs plans font entre eux, A (*fig.* 5) l'origine de l'épicycloïde, T le point de contact des deux cercles à une époque quelconque du mouvement, m le point correspondant de l'épicycloïde, C l'origine des coordonnées, CA l'axe des x, et l'axe des z perpendiculaire au plan TCA ; mp l'ordonnée z du point m, pq une perpendiculaire abaissée sur Tq, tangente commune aux deux cercles ;

enfin u l'angle TOm et $\frac{mn}{R}$ son sinus, on aura $z = mp = mq \cos i = (r - on) \cos i = r(1 - \cos u) \cos i$. Ici l'abscisse x est la somme des projections sur l'axe des x des 3 lignes CT $=$ R, TQ $= mn = r \sin u$ et $pq = mq \sin i = r(1 - \cos u) \sin i$; les lignes CT et pq font, avec cet axe, un angle égal à $\frac{ru}{R}$, complément de l'angle que Tq fait avec ce même axe : on a donc.... $x = R \cos \frac{ru}{R} + r \sin u \sin \frac{ru}{R} + r(1 - \cos u) \sin i \cos \frac{ru}{R}$. L'ordonnée y est égale à la somme des projections des deux lignes CT et pq sur l'axe des y, diminuée de la projection de la ligne Tq ; ces trois lignes font avec cet axe des angles complémens de ceux qu'elles font avec l'axe des x : on a donc

$$y = R \sin \frac{ru}{R} - r \sin u \cos \frac{ru}{R} + r(1 - \cos u) \sin i \sin \frac{ru}{R}.$$

L'élimination de u entre les valeurs des trois coordonnées donnera les équations de l'épicycloïde sphérique. Le point d'intersection des deux roues est situé sur l'axe des z, à une distance $Z = \frac{R}{\tan g i} + \frac{R'}{\sin i}$; car, dans la *figure* 7, Z $=$ QC $+$ VT ; la droite Sm est une des génératrices des surfaces directrices, elle vient rencontrer le plan des xy en un point dont les coordonnées sont

$$z = o, \quad x = \frac{Z}{Z - z} x, \quad y = \frac{Z}{Z - z} y,$$

ainsi que les donnent les équations de la droite Sm, dans lesquelles on fait $z = o$. L'élimination de u entre x et y donnera l'équation d'une base du cône directeur, située sur le plan supérieur ou inférieur de la roue. On déduit de ces équations $\tan g\, \omega = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \frac{y}{x}$. Les dents de la roue de rayon R$'$ seront limitées par des portions de courbes qui sous-tendront un angle ω' au centre C$'$, dont la tangente aura pour expression celle de $\tan g\, \omega$, dans laquelle on changera R en R$'$, r en r', et u en $\frac{ru}{r'}$. Les valeurs de $\tan g\, \omega$ et de $\tan g\, \omega'$ étant connues en fonction de u, il faudra que l'inégalité $2(R \tan g\, \omega + R' \tan g\, \omega') < ru$ soit satisfaite ; ce qui indiquera le *maximum* de ru, et par suite le *minimum* du nombre des dents de chaque roue.

15. On transmet encore le mouvement d'un axe à un autre faisant un angle avec le premier, en se servant de deux roues placées de la même manière que les précédentes, mais dont l'une a pour surfaces directrices des fuseaux coniques à bases circulaires. La seconde roue a des retraits, dont les flancs sont des cônes ayant pour base la courbe enveloppant le cercle d'un fuseau dans toutes les positions qu'il occupe, lorsque son centre décrit une épicycloïde sphérique ; les retraits doivent contenir la moitié d'un fuseau conique coupé par un plan méridien. La détermination du nombre minimum des dents repose sur des calculs analogues à ceux déjà exposés.

Des frottemens dans les engrenages.

14. Dans les engrenages tant cylindriques que coniques, le frottement sur les dents est variable avec la nature des courbes directrices, et la perte de force qu'ils occasionnent dans un temps donné peut être plus ou moins grande : il est donc essentiel d'évaluer cette perte de force, afin de mettre à même d'assigner la forme des dents la plus convenable, ou celle qui donne un *minimum* pour la force employée à vaincre le frottement.

Soit CMG (*fig.* 6) une courbe génératrice, qui, en roulant sur le cercle de rayon R' tangent au premier en C, engendre deux courbes directrices MB et MA tangentes en M ; soit z la normale CM à ces directrices, ρ l'angle qu'elle fait avec la tangente commune aux deux cercles ; si Q est une force appliquée tangentiellement au cercle de rayon R', et représentant la résistance à vaincre, la pression P au point M sera donnée par l'équation $PR'' \cos\rho = QR'$, d'où $P = \frac{Q}{\cos\rho}$. Lorsque l'angle ρ augmente de $d\rho$, le point M parcourt sur la directrice A M un arc de cercle dont le rayon est z, sous-tendant un angle égal à celui que font en c la courbe génératrice et le cercle de rayon R ; ce même point parcourt sur la directrice BM un arc du même cercle de rayon z, sous-tendant un angle égal à celui que la courbe génératrice fait en c avec le cercle de rayon R' ; la différence de ces deux arcs, ou la portion de la courbe AM qui glisse sur la courbe BM lorsque l'angle ρ augmente de $d\rho$, est donc égale à un arc de cercle dont le rayon est z, correspondant

à un angle au centre égal à celui que font entre eux les deux cercles au point c, ou à la somme des angles qu'ils font avec leur tangente commune. Or, si ds est la portion de la courbe génératrice qui sépare le point de contact c de celui c' lorsque l'angle ρ est devenu $\rho + d\rho$, il est aisé de voir que l'angle que le cercle de rayon R' fait avec sa tangente peut être représenté par $\frac{ds}{R'}$, et que $\frac{ds}{R}$ peut représenter pareillement celui que le cercle de rayon R fait avec cette même tangente. Ainsi

$$z\,ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$$

représente la portion de la directrice AM, qui glisse sur la courbe BM lorsque l'angle ρ augmente de $d\rho$.

La pression en M pouvant être considérée comme constante dans un instant infiniment petit, la force absorbée par le frottement pendant cet instant pourra être représentée par

$$Q\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)f\,\frac{zds}{\cos\rho},$$

et celle absorbée pendant un temps fini par l'intégrale

$$Q\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)f.\int_{\rho}^{\circ}\frac{zds}{\cos\rho},$$

f étant un coefficient constant, dépendant de la nature des surfaces frottantes. Or remarquons que dz représentant l'accroissement du rayon vecteur z, on a $dz = ds \cos \rho$, d'où $ds = \frac{dz}{\cos \rho}$: l'intégrale précédente peut donc se mettre sous la forme

$$Q\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) f. \int_{\rho}^{0} \frac{zdz}{\cos^2 \rho}.$$

Cela posé, un même arc S de toute courbe génératrice possible, engendrant deux portions de courbes directrices, qui feront décrire les mêmes fractions de révolution aux deux circonférences, trouver les courbes directrices dont le frottement absorbe le moins possible de force vive, c'est trouver, parmi toutes les fonctions ρ de z, pour lesquelles $S = \int_{\rho}^{0} \frac{dz}{\cos \rho}$ est constant, celle qui rend $\int_{\rho}^{0} \frac{zdz}{\cos^2 \rho}$ un *minimum*. La méthode des variations, appliquée à cette recherche, indique que

$$\int_{\rho}^{0} \frac{zdz}{\cos^2 \rho} \text{ ou } \int_{\rho}^{0} \frac{zdz}{\cos^2 \rho} + \alpha \int_{\rho}^{0} \frac{dz}{\cos \rho} = \int_{\rho}^{0} \frac{z+\alpha \cos \rho}{\cos^2 \rho} dz;$$

devant être un *minimum*, il faut que

$$\int_{\rho}^{0} dz \delta. \left(\frac{z+\alpha \cos \rho}{\cos^2 \rho}\right) = \int_{\rho}^{0} dz \left(\frac{2z+\alpha \cos \rho}{\cos^3 \rho}\right) \sin \rho \delta \rho = 0,$$

ce qui exige $2z+\alpha \cos \rho = 0$, ou que $\sin \rho = 0$, quelque soit z; mais la courbe génératrice devant être telle que $z=0$ et $\rho=0$ en même temps, cette variation ne peut être nulle que lorsque $\sin \rho = 0$, ou $\rho = 0$, quel que soit z: dans ce cas, la courbe génératrice est une ligne droite et les courbes directrices les développantes des deux circonférences. Ainsi l'engrenage cylindrique pour lequel la perte de force due au frottement est un minimum est celui pour lequel les dents des roues seraient limitées par des développantes de cercle.

Dans le cas où la courbe génératrice est un cercle, et par conséquent les courbes directrices des épicycloïdes, en représentant par γ le rayon du cercle générateur, on a $z = 2\gamma \sin \rho$, $dz = 2\gamma \omega' \delta$ $d\rho$, et l'intégrale donnant la somme de force vive perdue par le frottement est

$$Q f. \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right) 4 \gamma^2 \int_{\rho}^{0} \text{tang} \rho \, d\rho =$$

$$Q f \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) 4 \gamma^2 \log \frac{1}{\cos \rho}.$$

Si $R'\psi$ représente l'arc du cercle de rayon R' que le point de contact des circonférences a parcouru, tandis que l'angle ρ a augmenté de zéro à sa dernière valeur, l'arc $2\gamma\rho$ doit lui être égal; ce qui donne $\rho = \frac{R'}{2\gamma} \psi$ et $d\rho = \frac{R'}{2\gamma} d\psi$: la perte de force peut alors être mise sous la forme

$$Q f \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right). \, 2 R' \gamma \int_{\psi}^{0} \text{tang} \frac{R'}{2\gamma} \psi . \, d\psi;$$

si les directrices étaient des développantes pour le même angle ψ au centre du cercle de rayon R', la somme de force perdue serait

$$Q f \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) R'^2 \int_{\psi}^{0} \psi \, d\psi:$$

en retranchant cette somme de celle qui la précède, la différence

$$Q.f.\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).\,2\gamma R'\int_{\psi}^{\circ}\left(\text{tang}\,\frac{R'}{2\gamma}\,\psi-\psi\,\frac{R'}{2\gamma}\right)d\psi$$

est essentiellement positive, quel que soit γ; c'est ce qui vérifie ce que le calcul des variations avait indiqué.

Il resterait à résoudre la même question relativement au frottement des dents dans les engrenages coniques; mais cette recherche conduirait nécessairement à des résultats analogues aux précédens, et nous croyons pouvoir nous dispenser de l'entreprendre.

SUITE DU MÉMOIRE

SUR

LES MINES D'ÉTAIN DE SAXE (1);

PAR M. MANÈS, Ingénieur au Corps royal des Mines.

MINES D'ÉTAIN DE MARIENBERG.

Aspect physique.

LA contrée de Marienberg offre une foule de plateaux plus ou moins élevés, séparés entre eux par autant de ravins : les uns, peu profonds, qui reçoivent de petits ruisseaux, formant par leur réunion des étangs qu'on utilise pour les fonderies; les autres, profonds, escarpés, arrosés par des ruisseaux plus forts, qui se rendent dans la petite rivière de la Bockau.

On récolte beaucoup de grain sur les plateaux et du foin dans les bas-fonds. Le penchant des collines est couvert de sapins; il y en a aussi sur les hauteurs, mais disposés de loin en loin, et toujours en petites masses.

Constitution géologique.

Tous les environs de Marienberg sont formés d'un gneiss composé de beaucoup de quarz grisâtre, peu de mica noirâtre ou brunâtre, en petites paillettes entrelacées, et très-peu de feldspath jaunâtre à l'état terreux.

Dans ce gneiss, on trouve, 1°. des couches de feldspath blanc cristallin avec cristaux de tourmaline, près Boberschau; 2°. des bancs de

(1) Voyez, tome VIII de ce recueil, le commencement de ce Mémoire.